R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 5 (Lösung)

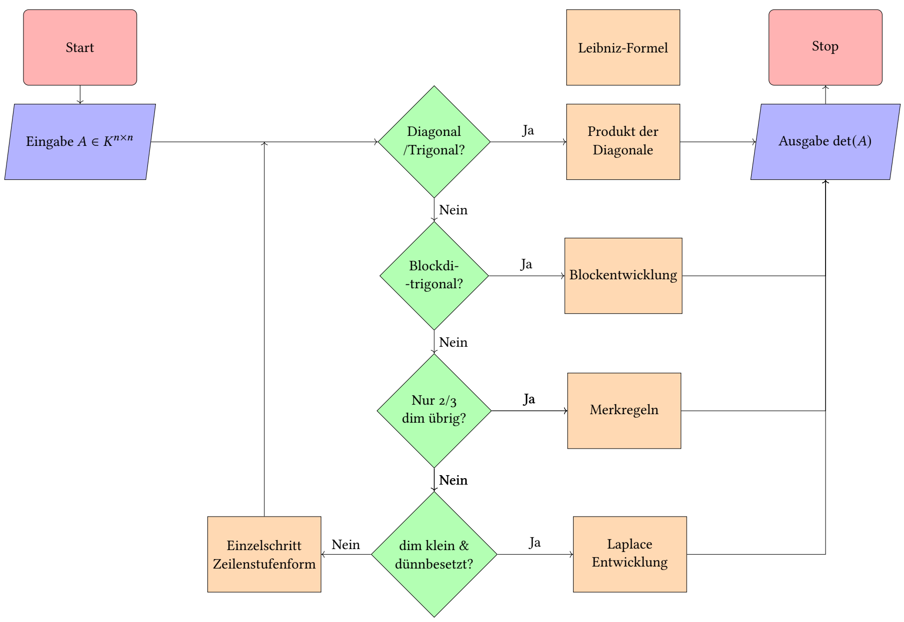
Ausgabedatum: 11. Mai 2026

Übungsaufgabe II-5.1. (Flow chart zur Determinantenbestimmung)

Wir haben verchiedene Möglichkeiten gesehen, Determinanten von Matrizen in $K^{n \times n}$ zu berechnen. Erstellen Sie ein Flussdiagramm, dass Ihren Entscheidungsprozess, welche Art von Matrizen Sie auf welche Weise behandeln, darstellt.

Lösung.

Das ist natürlich zu einem gewissen Grad persönlicher Geschmack, aber ich gehe wie folgt vor.



Übungsaufgabe II-5.2. (Beispiele zu Det. und Cramersche Regel)

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(i)

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ u & v & w & i & j \\ x & y & z & k & l \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3$ der Gleichung

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 123 & 145 & 167 \\ 267 & 245 & 223 \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Zeigen Sie per Induktion, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und bezüglich $\mathbb{R}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n+1} (x_j - x_i)$$

ist und erklären Sie, wann die Matrix invertierbar ist. **Hinweis:** Transformieren Sie durch Spaltenumformungen die erste Zeile bis auf den ersten Eintrag zu einer Nullzeile.

(d) Verwenden Sie die Cramersche Regel um die zweite Komponente x_2 der Lösung des folgenden Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

(a) (i) Wir arbeiten uns Richtung Zeilenstufenform vor. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

und an dieser Stelle können wir abbrechen, weil wir auf der Diagonalen einen Nulleintrag erreicht haben, unter dem nur weitere Nullen stehen, die Determinante ist also Null, wie man (in diesem Fall) auch leicht daran sieht, dass die letzten beiden Zeilen linear abhhängig sind.

(ii) Die Determinante muss Null sein, denn die ersten drei Spalten bzw. die ersten 3 Zeilen liegen im von e_4 und e_5 aufgespannten (zweidimensionalen) Unterraum und sind damit linear abhängig.

(b) Wir wissen, dass die Determinante genau dann den Wert Null annimmt, wenn die Zeilen (und damit die Spalten) linear abhängig sind. Die Gleichung wird also genau den (x_1, x_2, x_3) in $\langle (123, 145, 167), (267, 245, 223) \rangle$ gelöst.

(c) Es ist

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{10}{2} = 5$$

wobei die Determinanten leicht durch Entwicklung nach der letzten Spalte berechnet werden können.

Übungsaufgabe II-5.3. (Total unimodulare Matrizen)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt **total unimodular**, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen Wert in $\{-1, 0, 1\}$ hat.

(a) Geben Sie an, welche Werte die Einträge total unimodularer Matrizen haben können.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untermatrix beliebiger Dimension einer total unimodularen Matrix ebenfalls total unimodular ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Sind $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$ total unimodular, dann ist die Blockmatrix $[A, B] \in \mathbb{R}^{m \times (n_1 + n_2)}$ total unimodular.

(d) Zeigen Sie, dass für eine total unimodulare Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ auch die Blockmatrix

$$\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m \times n+m}$$

total unimodular ist.

Lösung.

(a) Da jeder Eintrag selbst eine quadratische 1×1-Untermatrix ist, können die Einträge nur in $\{-1, 0, 1\}$ liegen.

(b) Da jede quadratische Untermatrix einer beliebigen Untermatrix der ursprünglichen Matrix wieder eine quadratische Untermatrix der ursprünglichen Matrix ist, muss für diese die definierende Determinanteneigenschaft gelten.

(c) Die Aussage ist falsch, die Matrizen

$$A \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sind total unimodular, aber

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hat die quadratische Untermatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Determinante 2.

(d) Es sei $\tilde{A}$ eine quadratische Untermatrix von

$$\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m \times n+m},$$

dann hat $\tilde{A}$ ebenfalls Blockstruktur der Form

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{kl} & \cdots & a_{kn} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & u_1 & \cdots & u_p \\ a_{ml} & \cdots & a_{mn} & & & \\ & v_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & v_o & & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

für $n, p \in [\![0, m+1]\!]$ und $l, o \in [\![0, n+1]\!]$ (in den Extremfällen verschwindet mindestens ein Block und wir haben es mit einer Untermatrix von weniger Blöcken zu tun). Dabei sind die u_i und v_i Spalten- bzw. Zeilenvektoren, die entweder Nullvektoren oder Vektoren mit genau einem Einseintrag sind. Gibt es eine Nullzeile oder -spalte, dann ist die Determinante Null, anderenfalls entwickelt man nach den Einseinträgen der u_i und v_i um bei der Determinante einer echten Untermatrix von A zu landen, die wieder in $\{-1, 0, 1\}$ liegt.

Übungsaufgabe II-5.4. (Geordnete Körper und Orientierung eines Vektorraums)

(a) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist K mit $\leqslant$ ein geordneter Körper, dann sind die positiven Zahlen $P \coloneqq \{x \in K \mid x > 0\}$ abgeschlossen bzgl. der Körperoperationen und für jedes $y \in K$ gilt genau eine der Aussagen $y = 0$, $y \in P$, $-y \in P$.

(ii) Gibt es eine Menge $P \subseteq K$, die bezüglich der Körperoperationen abgeschlossen ist, so dass für jedes $y \in K$ genau eine der Aussagen $y = 0$, $y \in P$, $-y \in P$ gilt, dann ist K mit $x \leqslant y :\Leftrightarrow y - x \in P \vee x = y$ ein geordneter Körper.

Beachte: Einen Körper können wir also äquivalent darüber ordnen, dass wir die Ordnung direkt angeben, oder darüber, dass wir die positiven Zahlen kennzeichnen.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Basen des $\mathbb{R}_2[t]$ über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung $\leqslant$ untereinander umgekehrt/gleichorientiert sind:

$$B_1 \coloneqq (1, 1{+}t, 1{+}t{+}t^2), \quad B_2 \coloneqq (1{+}t, 1, 1{+}t{+}t^2), \quad B_3 \coloneqq (3{+}3t, 2, -1{-}t{-}t^2), \quad B_4 \coloneqq (1{+}2t, 3{+}5t^2, t)$$

Lösung.

(a) (i) Es seien $x, y > 0$. Dann ist $xy \geqslant 0$ auf Grund von der Definition, genauer (10.6b), und die Nullteilerfreiheit im Körper leifert $xy > 0$. Außerdem ist wegen (10.6a) auch $x + y \geqslant x > 0$. Damit sind die positiven Zahlen abgeschlossen unter den Körperverknüpfungen. Die verbleibende Aussage folgt direkt aus Lemma 10.20 Aussage (i).

(ii) Die Reflexivität ist in $\leqslant$ schon direkt eingebaut. Für die Antisymmetrie seien $x, y \in K$ mit $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$, also $y - x \in P$ und $x - y = -(y - x) \in P$ oder $x = y$, und somit nach Voraussetzung (Trichotomy) $x = y$. Für die Transitivität seien $x, y, z \in K$ mit $x \leqslant y$ und $y \leqslant z$. Gilt irgendwo Gleichheit, dann folgt die Behauptung sofort, im Fall $y - x \in P$ und $z - y \in P$ ist $z - x = (z - y) + (y - x) \in P$ auf Grund der Abgeschlossenheit unter der Addition. Damit haben wir eine Halbordnung nachgewiesen. Dass tatsächlich eine Totalordnung vorliegt folgt sofort aus der Trichotomyvoraussetzung. Die Körperstrukturverträglichkeit folgt aus der Abgeschlossenheit von P unter Plus und Mal.

(b) Es reicht zu entscheiden, ob die Basen in der gleichen Äquivalenzklasse liegen und damit ob sie in der gleichen Äquivalenzklasse wie die Monombasis liegen. Die Transformationsmatrizen von den Basen B_i in die Monombasis M haben besonders einfache Struktur, die Koeffizienten können wir nämlich direkt in der Darstellung der Basen ablesen. Es ergeben sich die folgenden Transformationsmatrizen, deren Determinanten wir gern bestimmen möchten:

$$\mathcal{T}_{M\leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_{M\leftarrow B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_{M\leftarrow B_3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_{M\leftarrow B_4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Nun ist $\mathcal{T}_{M\leftarrow B_1}$ eine Dreiecksmatrix und damit ist ihre Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, also 1. In $\mathcal{T}_{M\leftarrow B_2}$ ist gegenüber B_1 nur die erste mit der zweiten Spalte vertauscht, also ist hier die Determinante -1. In $\mathcal{T}_{M\leftarrow B_3}$ sind die Spalten von B_2 mit 3, 2 und -1 multipliziert, hier ist die Determinante also 6. Für $\mathcal{T}_{M\leftarrow B_4}$ entwickelt man nach der letzten Spalte und erhält die Determinante -5. Gleichorientiert sind also B_1 und B_3 sowie B_4 und B_2.