

ÜBUNG II - 4

Ausgabedatum: 4. Mai 2026

Übungsaufgabe II-4.1. (Permutationen eines Tensors vom Typ $(r, 0)$)

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie [Lemma 26.2](#), also die folgenden Aussagen.

- (a) Für jedes $\sigma \in S_r$ definiert die Abbildung P_σ aus [\(26.1\)](#) einen Automorphismus von $V^{\otimes r}$.
(b) Es gilt

$$P_{\sigma_1} \circ P_{\sigma_2} = P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} \quad (26.2)$$

für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in S_r$.

- (c) Ist B_V eine Basis von V , $t \in V^{\otimes r}$ ein Tensor und $A = \Phi_{B_V^{\otimes \dots \otimes V}}^{-1}(t)$ seine Komponentenhypermatrix bzgl. der Tensorproduktbasis $B_{V^{\otimes \dots \otimes V}}$, dann gilt für jedes $\sigma \in S_r$:

$$(a^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}})_{(i_1, \dots, i_r) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n \rrbracket} = \Phi_{B_V^{\otimes \dots \otimes V}}^{-1}(P_\sigma(t)) \quad (26.3)$$

ist die Komponentenhypermatrix von $P_\sigma(t)$.

- (d) Betrachten wir den Tensor $t \in V^{\otimes r}$ als Multilinearform in $\text{Mult}(V^*, \dots, V^*; K)$, dann gilt für jedes $\sigma \in S_r$:

$$P_\sigma(t)(v^1, \dots, v^r) = t(v^{\sigma(1)}, \dots, v^{\sigma(r)}). \quad (26.4)$$