R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 4 (Lösung)

Ausgabedatum: 4. Mai 2026

Übungsaufgabe II-4.1. (Permutationen eines Tensors vom Typ $(r, 0)$)

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 26.2, also die folgenden Aussagen.

(a) Für jedes $\sigma \in S_r$ definiert die Abbildung P_σ aus (26.1) einen Automorphismus von $V^{\otimes r}$.

(b) Es gilt

$$P_{\sigma_1} \circ P_{\sigma_2} = P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} \tag{26.2}$$

für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in S_r$.

(c) Ist B_V eine Basis von V, $t \in V^{\otimes r}$ ein Tensor und $A = \Phi^{-1}_{B_{V\otimes\cdots\otimes V}}(t)$ seine Komponentenhypermatrix bzgl. der Tensorproduktbasis $B_{V\otimes\cdots\otimes V}$, dann gilt für jedes $\sigma \in S_r$:

$$\left(a^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}}\right)_{(i_1,\ldots,i_r)\in[\![1,n]\!]\times\cdots\times[\![1,n]\!]} = \Phi^{-1}_{B_{V\otimes\cdots\otimes V}}(P_\sigma(t)) \tag{26.3}$$

ist die Komponentenhypermatrix von $P_\sigma(t)$.

(d) Betrachten wir den Tensor $t \in V^{\otimes r}$ als Multilinearform in $\operatorname{Mult}(V^*, \ldots, V^*; K)$, dann gilt für jedes $\sigma \in S_r$:

$$P_\sigma(t)(v^1, \ldots, v^r) = t(v^{\sigma(1)}, \ldots, v^{\sigma(r)}). \tag{26.4}$$

Lösung.

(a) Die Abbildung ist multilinear auf den Elementartensoren definiert und damit auf Grund der universellen Eigenschaft von $\otimes$ wohldefiniert und linear mit passenden Räumen, also ein Endomorphismus.

Bijektivität ist klar, weil wir die inverse Abbildung gerade als $P_{\sigma^{-1}}$ gegeben haben, das sehen wir im nächsten Aufgabenteil.

(b) Wir verifizieren die Behauptung auf den Elementartensoren und erhalten durch die linearen Erweiterung der Permutation Gleichheit auf dem gesamten Tensorraum. Dabei ist zu beachten, dass hier die Belegung der Eingänge der multilinearen Abbildung geändert wird, nicht die Permutationen auf Indizes angewandt werden.

$$\begin{aligned} P_{\sigma_1} \circ P_{\sigma_2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) &= P_{\sigma_1}(v_{\sigma_2^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_2^{-1}(r)}) \\ &= v_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(r))} \\ &= v_{\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}(r)} \\ &= v_{(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}(r)} \\ &= P_{\sigma_1 \circ \sigma 2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r). \end{aligned}$$

(c) Aus der Komponentenermittlereigenschaft der dualen Basis, siehe Gleichung (24.12), kriegen wir (wieder auf den Elementartensoren und damit auf allen weiteren Tensoren) für alle Indextupel $(i_1, \ldots, i_r) \in [\![1, n]\!] \times \cdots \times [\![1, n]\!]$ die Einträge der Komponentenmatrix $\tilde{A}$ von $\Phi^{-1}_{B_{V \otimes \cdots \otimes V}}(P_\sigma(t))$

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{i_1, \ldots, i_r} &= (v^*_{i_1} \boxtimes \cdots \boxtimes v^*_{i_r})(P_\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)) \\ &= \langle v^*_{i_1}, v_{\sigma^{-1}(1)} \rangle \cdots \langle v^*_{i_r}, v_{\sigma^{-1}(r)} \rangle \\ &= \langle v^*_{i_{\sigma(1)}}, v_1 \rangle \cdots \langle v^*_{i_{\sigma(r)}}, v_r \rangle \\ &= (v^*_{i_{\sigma(1)}} \boxtimes \cdots \boxtimes v^*_{i_{\sigma(r)}})(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) \\ &= a^{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}}. \end{aligned}$$

(d) Es ist (wieder auf den Elementartensoren und damit auf allen weiteren Tensoren)

$$\begin{aligned} P_\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)(v^1, \ldots, v^r) &= (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)})(v^1, \ldots, v^r) \\ &= \langle v^1, v_{\sigma^{-1}(1)} \rangle \cdots \langle v^r, v_{\sigma^{-1}(r)} \rangle \\ &= \langle v^{\sigma(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle v^{\sigma(r)}, v_r \rangle \\ &= (v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)(v^{\sigma(1)}, \ldots, v^{\sigma(r)}). \end{aligned}$$