R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg



# Übung II - 3

Ausgabedatum: 27. April 2026

**Übungsaufgabe II-3.1.** (Isomorphe Tensorprodukte)

Zeigen Sie Beispiel 23.20, also die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden $K$-Vektorraum $U$ existiert ein kanonischer Isomorphismus $K \otimes U \cong U$.

(b) Für je zwei $K$-Vektorräume $U$ und $V$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus $U \otimes V \cong V \otimes U$.

**Übungsaufgabe II-3.2.** (Basics zum freien Vektorraum)

(a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten knapp, wie zu einer Menge $X$ der dazugehörige freie $K$-Vektorraum konstruiert wird, welche Dimension er hat und welche Konsequenz das für Abbildungen $f : X \to W$ in einen $K$-Vektorraum $W$ hat.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des freien Vektorraums zu der Menge $X \coloneqq \{\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{Q}), \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.

(c) Entscheiden Sie, ob eine Menge $X$ existiert, deren freier $K$-Vektorraum ein Nullraum ist.

**Übungsaufgabe II-3.3.** (Tensorproduktkonstruktion durch den freien Vektorraum)

(a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten knapp die Konstruktion eines konkreten Tensorprodukts über einen freien Vektorraum.

(b) Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U \coloneqq \mathbb{R}^3$ und $V \coloneqq \mathbb{R}^6$. Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums $N = \langle E \rangle$ in der Definition von $U \otimes_f V$ in Gleichung (23.11).

(c) Erklären Sie, welchen Vorteil die Konstruktion eines konkreten Tensorprodukts über den freien Vektorraum im Vergleich zu den Alternativen in Beispiel 23.29 hat.

**Übungsaufgabe II-3.4.** (Faktorisierung von Abbildungen durch freien Vektorraum)

Gegeben sei eine Menge $X$, ein $K$-Vektorraum $W$ und eine Abbildung $f : X \to W$. Zeigen Sie, dass für den zu $f$ gehörigen Homomorphismus $g\colon (K^X)_{00} \to W$ die Gleichheit $\operatorname{Bild}(g) = \langle f(X) \rangle$ gilt.

**Übungsaufgabe II-3.5.** (Eigenschaften des Kronecker-Produkts von Matrizen)

Es sei $K$ ein Körper. Zeigen Sie Lemma 23.33, also die folgenden Aussagen für das Kronecker-Produkt:

(a) Das Kronecker-Produkt ist bilinear:

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2) \boxtimes B &= A_1 \boxtimes B + A_2 \boxtimes B \\ A \boxtimes (B_1 + B_2) &= A \boxtimes B_1 + A \boxtimes B_2 \\ \alpha\,(A \boxtimes B) &= (\alpha\, A) \boxtimes B = A \boxtimes (\alpha\, B).\end{aligned}$$

(b) Das Kronecker-Produkt ist assoziativ:

$$(A \boxtimes B) \boxtimes C = A \boxtimes (B \boxtimes C).$$

(c) Das Kronecker-Produkt ist verträglich mit der Matrixmultiplikation:

$$(A_1\, A_2) \boxtimes (B_1\, B_2) = (A_1 \boxtimes B_1)\,(A_2 \boxtimes B_2).$$

(d) Das Kronecker-Produkt ist verträglich mit der Transposition:

$$(A \boxtimes B)^\intercal = A^\intercal \boxtimes B^\intercal.$$

(e) Das Kronecker-Produkt ist verträglich mit der Invertierung: Sind $A$ und $B$ invertierbar, dann auch $A \boxtimes B$, und es gilt

$$(A \boxtimes B)^{-1} = A^{-1} \boxtimes B^{-1}.$$

(f) Das Kronecker-Produkt ist verträglich mit dem Rang:

$$\operatorname{Rang}(A \boxtimes B) = \operatorname{Rang}(A)\ \operatorname{Rang}(B).$$