R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 3 (Lösung)

Ausgabedatum: 27. April 2026

Übungsaufgabe II-3.1. (Isomorphe Tensorprodukte)

Zeigen Sie Beispiel 23.20, also die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden K-Vektorraum U existiert ein kanonischer Isomorphismus $K \otimes U \cong U$.

(b) Für je zwei K-Vektorräume U und V gibt es einen kanonischen Isomorphismus $U \otimes V \cong V \otimes U$.

Lösung.

(a) Der Isomorphismus ist auf den Elementartensoren durch $K \otimes U \ni (\alpha, u) \mapsto \alpha\, u \in U$ gegeben. Seine Konstruktion ist nicht abhängig von Basen, womit er kanonischt ist. Die Linearität folgt direkt aus der Konstruktion auf den Elementartensoren. Die Isomorphie sieht man direkt an der Umkehrfunktion, die $U \ni u \mapsto 1 \otimes u$ ist. Das alles funktioniert, weil wegen der Bilinearität von $\otimes$ gerade $\alpha \otimes u = 1 \otimes \alpha u$ gilt.

(b) Der Isomorphismus ist auf den Elementartensoren durch $U \otimes V \ni u \otimes v \mapsto v \otimes u \in V \otimes U$ gegeben. Seine Konstruktion ist nicht abhängig von Basen, womit er kanonischt ist. Die Linearität folgt direkt aus der Konstruktion auf den Elementartensoren. Die Isomorphie sieht man direkt an der Umkehrfunktion $V \otimes U \ni v \otimes u \mapsto u \otimes v \in U \otimes V$.

Übungsaufgabe II-3.2. (Basics zum freien Vektorraum)

(a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten knapp, wie zu einer Menge X der dazugehörige freie K-Vektorraum konstruiert wird, welche Dimension er hat und welche Konsequenz das für Abbildungen $f\colon X \to W$ in einen K-Vektorraum W hat.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des freien Vektorraums zu der Menge $X \coloneqq \{\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{Q}), \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.

(c) Entscheiden Sie, ob eine Menge X existiert, deren freier K-Vektorraum ein Nullraum ist.

Lösung.

(a) Der freie Vektorraum $(K^X)_{00}$ zu X ist gerade das, was in dem Symbol kodiert ist, nämlich dass wir zu allen Punkten $x \in X$ die (natürlicherweise linear unabhängige) dazugehörige charakteristischen Funktion $\{e_x \mid x \in X\}$ als Basis eines Vektorraums auffassen indem wir ihre lineare Hülle betrachten. Die Dimension dieses Vektorraums stimmt dann mit der Mächtigkeit von X überein, denn X ist gerade die Indexmenge der Basis. Beliebige Abbildungen $f\colon X \to W$ erhalten so genau eine zugehörige *lineare* Funktion $g\colon (K^X)_{00} \to W$, die das Verhalten von f auf der Indexmenge X auf den freien Vektorraum übersetzt.

(b) Wie im obigen Punkt ausgeführt kommt es nur auf die Mächtigkeit von X an, hier handelt es sich also für beliebige K bei $(K^{\{\mathcal{P}(\mathbb{R}),\mathcal{P}(\mathbb{Q}),\mathcal{P}(\mathbb{Z}),\mathcal{P}(\mathbb{N})\}})_{00}$ um einen 4-dimensionalen K-Vektorraum.

(c) Das ist gerade der Fall für die leere Menge, also wenn $X = \emptyset$ ist. Hier ist auch die Menge $\{e_x \mid x \in X\}$ leer und der einzige Vektorraum mit leerer Basis ist gerade der/ein Nullraum.

Übungsaufgabe II-3.3. (Tensorproduktkonstruktion durch den freien Vektorraum)

(a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten knapp die Konstruktion eines konkreten Tensorprodukts über einen freien Vektorraum.

(b) Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U \coloneqq \mathbb{R}^3$ und $V \coloneqq \mathbb{R}^6$. Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums $N = \langle E \rangle$ in der Definition von $U \otimes_/ V$ in Gleichung (23.11).

(c) Erklären Sie, welchen Vorteil die Konstruktion eines konkreten Tensorprodukts über den freien Vektorraum im Vergleich zu den Alternativen in Beispiel 23.29 hat.

Lösung.

(a) Der freie Vektorraum $(K^{U\times V})_{00}$ ermöglicht die Identifikation von beliebigen $f\colon U \times V \to W$ mit linearen Funktionen $g \in \operatorname{Homo}((K^{U\times V})_{00}, W)$. Schränkt man sich auf einen Unterraum der Funktionen $K^{U\times V}$ ein, dann erlaubt das sogar die Identifikation mit $g \in \operatorname{Homo}((K^{U\times V})_{00} / N, W)$ für einen geeigneten Unterraum N (gerade dem Schnitt aller Kerne der erreichten linearen Funktionen in $\operatorname{Homo}((K^{U\times V})_{00}, W)$). Bei der Konstruktion des Tensorproduktraums nutzt man als Teilraum von $K^{U\times V}$ gerade die bilinearen Funktionen, was genau die Identifikation von bilinearen Funktionen auf $U \times V$ mit linearen Funktionen auf einem anderen Raum ermöglicht. Um das Bild zu vervollständigen muss man nun gerade $(K^{U\times V})_{00} / N$ (den „anderen Raum") als den Tensorproduktraum wählen und der bilinearen Abbildung $\otimes$ bleibt nun gerade, (u, v) auf $[e_{(u,v)}]$ abzubilden, also die Klasse aller charakteristischer Funktionen von Punkten, deren Bilder unter allen bilinearen Abbildungen übereinstimmen. Diese Klassenbildung überträgt jedes bilineare Verhalten (kodiert in N) auf $\otimes$.

(b) Der freie Vektorraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6})_{00}$ hat unendliche Dimension, der Tensorproduktraum $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^6$ aber die Dimension $3 \cdot 6 = 18$, der rausfaktorisierte Unterraum muss also ebenfalls unendliche Dimension haben, denn der Faktorraum hat die gleiche Dimension wie ein zu N komplementärer Unterraum.

(c) Die Konstruktion über den freien Vektorraum benötigt weder Endlichdimensionalität noch Existenz von Basen und ist damit unter schwächeren Voraussetzungen durchführbar.

Übungsaufgabe II-3.4. (Faktorisierung von Abbildungen durch freien Vektorraum)

Gegeben sei eine Menge X, ein K-Vektorraum W und eine Abbildung $f\colon X \to W$. Zeigen Sie, dass für den zu f gehörigen Homomorphismus $g\colon (K^X)_{00} \to W$ die Gleichheit $\operatorname{Bild}(g) = \langle f(X) \rangle$ gilt.

Lösung.

Es ist per Definition von g

$$\operatorname{Bild}(g) = g((K^X)_{00}) = g(\langle \{e_x \mid x \in X\} \rangle = \langle g(\{e_x \mid x \in X\}) \rangle = \langle \{f(x) \mid x \in X\} \rangle = \langle f(X) \rangle.$$

Übungsaufgabe II-3.5. (Eigenschaften des Kronecker-Produkts von Matrizen)

Es sei K ein Körper. Zeigen Sie Lemma 23.33, also die folgenden Aussagen für das Kronecker-Produkt:

(a) Das Kronecker-Produkt ist bilinear:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2) \boxtimes B &= A_1 \boxtimes B + A_2 \boxtimes B \\ A \boxtimes (B_1 + B_2) &= A \boxtimes B_1 + A \boxtimes B_2 \\ \alpha\,(A \boxtimes B) &= (\alpha\,A) \boxtimes B = A \boxtimes (\alpha\,B). \end{aligned}$$

(b) Das Kronecker-Produkt ist assoziativ:

$$(A \boxtimes B) \boxtimes C = A \boxtimes (B \boxtimes C).$$

(c) Das Kronecker-Produkt ist verträglich mit der Matrixmultiplikation:

$$(A_1\,A_2) \boxtimes (B_1\,B_2) = (A_1 \boxtimes B_1)\,(A_2 \boxtimes B_2).$$

(d) Das Kronecker-Produkt ist verträglich mit der Transposition:

$$(A \boxtimes B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} \boxtimes B^\mathsf{T}.$$

(e) Das Kronecker-Produkt ist verträglich mit der Invertierung: Sind A und B invertierbar, dann auch $A \boxtimes B$, und es gilt

$$(A \boxtimes B)^{-1} = A^{-1} \boxtimes B^{-1}.$$

(f) Das Kronecker-Produkt ist verträglich mit dem Rang:

$$\operatorname{Rang}(A \boxtimes B) = \operatorname{Rang}(A)\ \operatorname{Rang}(B).$$

Lösung.

Die Beweise sind unschwierig, da lediglich die Definitionen aufgelöst werden müssen, aber auf Grund diverser Indizes aufwendig aufzuschreiben. Wir beweisen hier exemplarische (a) und (c).

Zu (a): Es ist

$$\begin{aligned}
(A_1 + A_2) \boxtimes B &= \begin{bmatrix} (a_{1,11} + a_{2,11})\,B & (a_{1,12} + a_{2,12})\,B & \cdots & (a_{1,1m_1} + a_{2,1m_1})\,B \\ (a_{1,21} + a_{2,21})\,B & (a_{1,22} + a_{1,22})\,B & \cdots & (a_{1,2m_1} + a_{2,2m_1})\,B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{1,n_1 1} + a_{2,n_1 1})\,B & (a_{1,n_1 2} + a_{2,n_1 2})\,B & \cdots & (a_{1,n_1 m_1} + a_{2,n_1 m_1})\,B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{1,11}\,B + a_{2,11}\,B & a_{1,12}\,B + a_{2,12}\,B & \cdots & a_{1,1m_1}\,B + a_{2,1m_1}\,B \\ a_{1,21}\,B + a_{2,21}\,B & a_{1,22}\,B + a_{1,22}\,B & \cdots & a_{1,2m_1}\,B + a_{2,2m_1}\,B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n_1 1}\,B + a_{2,n_1 1}\,B & a_{1,n_1 2}\,B + a_{2,n_1 2}\,B & \cdots & a_{1,n_1 m_1}\,B + a_{2,n_1 m_1}\,B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{1,11}\,B + a_{2,11}\,B & a_{1,12}\,B + a_{2,12}\,B & \cdots & a_{1,1m_1}\,B + a_{2,1m_1}\,B \\ a_{1,21}\,B + a_{2,21}\,B & a_{1,22}\,B + a_{1,22}\,B & \cdots & a_{1,2m_1}\,B + a_{2,2m_1}\,B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n_1 1}\,B + a_{2,n_1 1}\,B & a_{1,n_1 2}\,B + a_{2,n_1 2}\,B & \cdots & a_{1,n_1 m_1}\,B + a_{2,n_1 m_1}\,B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{1,11}\,B & a_{1,12}\,B & \cdots & a_{1,1m_1}\,B \\ a_{1,21}\,B & a_{1,22}\,B & \cdots & a_{1,2m_1}\,B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n_1 1}\,B & a_{1,n_1 2}\,B & \cdots & a_{1,n_1 m_1}\,B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{2,11}\,B & a_{2,12}\,B & \cdots & a_{2,1m_1}\,B \\ a_{2,21}\,B & a_{2,22}\,B & \cdots & a_{2,2m_1}\,B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2,n_1 1}\,B & a_{2,n_1 2}\,B & \cdots & a_{2,n_1 m_1}\,B \end{bmatrix} \\
&== A_1 \boxtimes B + A_2 \boxtimes B
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
A \boxtimes (B_1 + B_2) &= \begin{bmatrix} a_{11}\,(B_1 + B_2) & a_{12}\,(B_1 + B_2) & \cdots & a_{1m_1}\,(B_1 + B_2) \\ a_{21}\,(B_1 + B_2) & a_{22}\,(B_1 + B_2) & \cdots & a_{2m_1}\,(B_1 + B_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1}\,(B_1 + B_2) & a_{n_1 2}\,(B_1 + B_2) & \cdots & a_{n_1 m_1}\,(B_1 + B_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}\,B_1 + a_{11}\,B_2 & a_{12}\,B_1 + a_{12}\,B_2 & \cdots & a_{1m_1}\,B_1 + a_{1m_1}\,B_2 \\ a_{21}\,B_1 + a_{21}\,B_2 & a_{22}\,B_1 + a_{22}\,B_2 & \cdots & a_{2m_1}\,B_1 + a_{2m_1}\,B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1}\,B_1 + a_{n_1 1}\,B_2 & a_{n_1 2}\,B_1 + a_{n_1 2}\,B_2 & \cdots & a_{n_1 m_1}\,B_1 + a_{n_1 m_1}\,B_2 \end{bmatrix} A \boxtimes B_1 + A \boxtimes B_2
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(\alpha A) \boxtimes B &= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}\,B & \alpha a_{12}\,B & \cdots & \alpha a_{1m_1}\,B \\ \alpha a_{21}\,B & \alpha a_{22}\,B & \cdots & \alpha a_{2m_1}\,B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n_1 1}\,B & \alpha a_{n_1 2}\,B & \cdots & \alpha a_{n_1 m_1}\,B \end{bmatrix} \\
&= \alpha(A \boxtimes B) \begin{bmatrix} a_{11}\,\alpha B & a_{12}\,\alpha B & \cdots & a_{1m_1}\,\alpha B \\ a_{21}\,\alpha B & a_{22}\,\alpha B & \cdots & a_{2m_1}\,\alpha B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1}\,\alpha B & a_{n_1 2}\,\alpha B & \cdots & a_{n_1 m_1}\,\alpha B \end{bmatrix} \\
&= A \boxtimes (\alpha B).
\end{aligned}
$$

Zu (c): Gegeben seien Matrizen

$$
A \in K^{n \times m},\ \tilde{A} \in K^{m \times l},\ B \in K^{r \times s},\ \tilde{B} \in K^{s \times t},
$$

so dass

$$
A\tilde{A} \in K^{n \times l},\ B\tilde{B} \in K^{r \times t},\ A \boxtimes B \in K^{nr \times ms},\ \tilde{A}\tilde{B} \in K^{ms \times lt},\ A\tilde{A} \boxtimes B\tilde{B} \in K^{nr \times lt},\ (A \boxtimes B)(\tilde{A} \boxtimes \tilde{B}) \in K^{nr \times lt}.
$$

Wir vergleichen die Einträge der Matrizen $A\tilde{A} \boxtimes B\tilde{B}$ und $(A \boxtimes B)(\tilde{A} \boxtimes \tilde{B})$ am Eintrag $(i, j) \in [\![1, nr]\!] \times [\![1, lt]\!]$.

Durch ganzzahlige Division und Division mit Rest findet man zu jedem solchen Indexpaar eindeutige Darstellungen

$$
i = (i_1 - 1)r + i_2 \qquad j = (j_1 - 1)t + j_2
$$

mit $i_1 \in [\![1, n]\!]$, $i_2 \in [\![1, r]\!]$ und $j_1 \in [\![1, l]\!]$, $j_2 \in [\![1, t]\!]$.

Nun gilt

$$\begin{aligned}((A\tilde{A}) \boxtimes (B\tilde{B}))_{ij} &= (A\tilde{A})_{i_1,j_1} \cdot (B\tilde{B})_{i,j} \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^{m} a_{i_1\nu}\tilde{a}_{\nu j_1}\right)\left((\sum_{\mu=1}^{s} b_{i_2\mu}\tilde{b}_{\nu j_2}\right) \\ &= \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{s}(a_{i_1\nu}\tilde{a}_{\nu j_1})(b_{i_2\mu}\tilde{b}_{\nu j_2}).\end{aligned}$$

Ebenfalls ist

$$\begin{aligned}((A \boxtimes B)(\tilde{A} \boxtimes \tilde{B}))_{ij} &= \sum_{\nu=1}^{m} a_{i_1\nu}\tilde{a}_{\nu i_2} \sum_{\mu=1}^{s} b_{i_2\mu}\tilde{b}_{\mu i_2} \\ &= \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{s}(a_{i_1\nu}\tilde{a}_{\nu j_1})(b_{i_2\mu}\tilde{b}_{\nu j_2}).\end{aligned}$$