R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 2

Ausgabedatum: 20. April 2026

Übungsaufgabe II-2.1. (Primale und duale Isomorphie)

Gegeben seien zwei K-Vektorräume U und V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $U \cong V$ impliziert $U^* \cong V^*$.

(b) Sind U und V endlichdimensional, dann impliziert $U^* \cong V^*$ auch $U \cong V$.

Übungsaufgabe II-2.2. (Basics zu Multilinearformen und Tensoren)

(a) Es seien U, V, W Vektorräume über demselben Körper K. Zeigen Sie Satz 23.3, also dass $\operatorname{Bil}(U, V; W)$ ein Unterraum von $W^{U \times V} = \{f \colon U \times V \to W\}$ ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer bilinearen Abbildung zweier Vektorräume, das zeigt, dass die Bildmenge einer bilinearen Abbildung i. A. kein Unterraum des Zielraums ist.

(c) Beschreiben Sie mit eigenen Worten knapp, was Tensorprodukte und Tensoren sind.

Übungsaufgabe II-2.3. (No-cloning theorem)

Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \geqslant 2$ und $e \in V$. Weiterhin sei $V \otimes V$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f \in \operatorname{Homo}(V \otimes V, V \otimes V)$ gibt, so dass

$$f(v \otimes e) = v \otimes v \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Hinweis: Was müsste sonst gelten, wenn v die Summe zweier verschiedener Basiselemente von V ist?