Übung II - 2 (Lösung)

Ausgabedatum: 20. April 2026

Übungsaufgabe II-2.1. (Primale und duale Isomorphie)

Gegeben seien zwei K-Vektorräume U und V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $U \cong V$ impliziert $U^* \cong V^*$.

(b) Sind U und V endlichdimensional, dann impliziert $U^* \cong V^*$ auch $U \cong V$.

Lösung.

(a) Ist $U \cong V$, dann existiert ein Isomorphismus $f\colon U \to V$. Dessen duale Abbildung $f^*\colon V^* \to U^*$ ist ebenfalls ein Isomorphismus, siehe Satz 21.7, und seine Umkehrabbildung zeigt direkt $U^* \cong V^*$.

(b) Wir nutzen (a), um zu folgern, dass aus $U^* \cong V^*$ auch $U^{**} \cong V^{**}$ folgt. Da im endlichdimensionalen Fall auf Grund der kanonischen Bijektion auch $U^{**} \cong U$ und $V^{**} \cong V$ gilt (siehe Satz 22.2), haben wir

$$U \cong U^{**} \cong V^{**} \cong V.$$

Übungsaufgabe II-2.2. (Basics zu Multilinearformen und Tensoren)

(a) Es seien U, V, W Vektorräume über demselben Körper K. Zeigen Sie Satz 23.3, also dass $\mathrm{Bil}(U, V; W)$ ein Unterraum von $W^{U\times V} = \{f\colon U \times V \to W\}$ ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer bilinearen Abbildung zweier Vektorräume, das zeigt, dass die Bildmenge einer bilinearen Abbildung i. A. kein Unterraum des Zielraums ist.

(c) Beschreiben Sie mit eigenen Worten knapp, was Tensorprodukte und Tensoren sind.

Lösung.

(a) Wir verwenden das Unterraumkriterium. Nichtleerheit der Menge der Bilinearformen ist klar, denn die Nullfunktion ist bilinear, es gilt nämlich

$$0(u, \alpha v + \tilde{v}) = 0 = 0 + 0 = \alpha 0(u, v) + 0(u, \tilde{v})$$

und die analoge Formulierung im zweiten Eingang, jeweils für entsprechende Elemente $u \in U$ und $v, \tilde{v} \in V$.

Seien jetzt zwei Bilinearformen $f, g \colon U \times V \to W$ gegeben und $\alpha, \beta \in K$ sowie $u \in U$, $v\tilde{v} \in V$. Dann gilt wegen der punktweisen Verknüpfung im Vektorraum der Abbildungen:

$$\begin{aligned}(\alpha f + g)(u, \beta v + \tilde{v}) &= \alpha f(u, \beta v + \tilde{v}) + g(u, \beta v + \tilde{v}) \\ &= \alpha\beta f(u, v) + \alpha f(u, \tilde{v}) + \beta g(u, v) + g(u, \tilde{v}) \\ &= \beta(\alpha f + g)(u, v) + (\alpha f + g)(u, \tilde{v}),\end{aligned}$$

sowie die analoge Formulierung im ersten Eingang der Abbildungen und damit ist die Menge bezüglich der Vektorraumverknüpfungen abgeschlossen.

(b) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy^\intercal$
$R^{2\times 2}$ liefert per Konstruktion nur Matrizen mit Rang 1, aber die Produkte

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1, 0) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0, 1) = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

summieren sich zur Identitätsmatrix mit Rang 2.

(c) Das Tensorprodukt zweier K-Vektorräume U und V ist ein Tupel aus einem K-Vektorraum (meist $U \otimes V$ notiert) und einer Bilinearform $\otimes \in \mathrm{Bil}(U, V; U \otimes V)$, welche die sogenannte *universelle Eigenschaft des Tensorprodukts* erfüllen, nämlich dass für beliebige K-Vektorräume W zu jeder Bilinearform $b \in \mathrm{Bil}(U \times V; W)$ eine eindeutige lineare Abbildung $f \in \mathrm{Homo}(U \otimes V; W)$ existiert, so dass $b = f \circ \otimes$, also dass bilineare Abbildungen auf U, V mittels $\otimes$ in lineare Abbildungen auf $U \otimes V$ übersetzt werden können. Dabei ist entscheidend, dass $\otimes$ eben gerade universell ist, also nicht von der Wahl der Bilinearform b abhängig. Tensorprodukte sind also gerade die Vektorräume, welche die (isomorphe) Transformation des Verhaltens von Bilinearformen auf Produkträumen in das Verhalten von Homomorphismen (auf diesen Tensorprodukten) ermöglichen. So lassen sich für lineare Abbildungen bekannte Resultate in den Kontext der multilinearen Algebra übertragen. Tensoren sind gerade die Elemente des Tensorproduktraums $U \otimes V$, also die Objekte, deren Verhalten gerade die Bilinearität der bilinearen Abbildungen kodiert.

Was wir jetzt noch nicht wissen: Die Tensoren selbst (also die Elemente des Tensorproduktraums) als Multilinearformen aufzufassen liefert in der kommenden Inhaltswoche die Basis des vielseitig nutzbaren (r, s)-Tensorkalküls.

Übungsaufgabe II-2.3. (No-cloning theorem)

Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \geqslant 2$ und $e \in V$. Weiterhin sei $V \otimes V$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f \in \operatorname{Homo}(V \otimes V, V \otimes V)$ gibt, so dass

$$f(v \otimes e) = v \otimes v \quad \text{für alle } v \in V.$$

Hinweis: Was müsste sonst gelten, wenn v die Summe zweier verschiedener Basiselemente von V ist?

Lösung.

Nach Voraussetzung ist $\dim(V) \geqslant 2$. In einer Basis B von V existieren also zwei verschiedene, nicht-Null Vektoren $v_1, v_2 \in B$ und wir können $v \coloneqq v_1 + v_2 \in V$ setzen.

Für ein f mit der gegebenen Eigenschaft wäre dann (erst bilinear austensorieren, dann linear abbilden):

$$f(v \otimes e) = f(v_1 + v_2 \otimes e) = f(v_1 \otimes e + v_2 \otimes e) = f(v_1 \otimes e) + f(v_2 \otimes e) = v_1 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2$$

und zugleich (erst linear abbilden, dann bilinear austensorieren)

$$f(v \otimes e) = v \otimes v = (v_1 + v_2) \otimes (v_1 + v_2) = v_1 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2,$$

also können wir folgern, dass

$$v_1 \otimes v_2 = -v_2 \otimes v_1. \tag{0.1}$$

Sowohl v_1 als auch v_2 sind nicht der Nullvektor, aus Hausaufgabe II-2.4 wissen wir also, dass das nur der Fall sein kann, wenn λ_1, λ_2 existieren, so dass

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad \text{und} \quad v_1 = -\lambda_1 v_2,\ v_2 = \lambda_2 v_1,$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von (v_1, v_2) als Teilfamilie der Basis B.

Statt mit Hausaufgabe II-2.4 könnte man hier auch mit der Isomorphie aller Tensorprodukträume argumentieren. Der Tensorproduktraum $V \tilde{\otimes} V$ mit $\tilde{\otimes}$, den wir aus V mit der Basis B konstruieren können ist isomorph zu $V \otimes V$ über ein $\tilde{f} \in \operatorname{Iso}(V \tilde{\otimes} V; V \otimes V)$, so dass $\otimes = \tilde{f} \circ \tilde{\otimes}$. Mit dieser Abbildung können wir aus Gleichung (0.1) folgern, dass

$$0 = \tilde{f}^{-1}(0) = \tilde{f}^{-1}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) = \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(v_1 \tilde{\otimes} v_2 + v_2 \tilde{\otimes} v_1)) = v_1 \tilde{\otimes} v_2 + v_2 \tilde{\otimes} v_1,$$

im Widerspruch dazu, dass $(v_1 \tilde{\otimes} v_2, v_2 \tilde{\otimes} v_1)$ als Teilfamilie der Basis von $V \tilde{\otimes} V$ linear unabhängig sein muss.