R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 1

Ausgabedatum: 13. April 2026

Übungsaufgabe II-1.1. (Basics zu Linearformen und Dualräumen)

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Linearformen sind.

 (i) $\mathbb{Q}_3 \ni (x, y, z) \mapsto x \in \mathbb{R}$ jeweils über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

 (ii) $\mathbb{Z}_2^3 \ni (x, y, z) \mapsto x^3 \in \mathbb{Z}_2$ jeweils über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

(b) Es sei U ein Unterraum vom Vektorraum V. Zeigen Sie, dass U^* höchstens gleichmächtig zu V^* ist.

Übungsaufgabe II-1.2. (Duale Basen)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{Z}_3^2$ über $\mathbb{Z}_3$ mit der Basis $B \coloneqq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. Bestimmen Sie die Bilder der dualen Basiselemente an dem Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Übungsaufgabe II-1.3. (Darstellung von Linearformen)

Es sei $V \coloneqq (\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}, \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ mit den Basen $B \coloneqq (\{0\}, \{1\}, \{2\})$ und $\widehat{B} \coloneqq (\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\})$.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung von $v \coloneqq \{0, 2\}$ bzgl. B und der Darstellung der Linearform $v^* \coloneqq v \mapsto \#(v \cap \{1\})$ bzgl. B^*.

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\mathcal{T}_{\widehat{B} \leftarrow B}$ und $\mathcal{T}_{\widehat{B}^* \leftarrow B^*}$.

(c) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung von v und v^* bzgl. $\widehat{B}$ und $\widehat{B}^*$ mithilfe der Basiswechselmatrizen.

Übungsaufgabe II-1.4. ((Prä-)-Annihilatoren)

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\{(0,1,2)\}^0$ in $\mathbb{R}_3^*$ über $\mathbb{R}$.

(b) Es seien V ein K-Vektorraum und $M_1, M_2 \subseteq V$ sowie $F_1, F_2 \subseteq V^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^0 \subseteq M_1^0$.

(ii) $M^0 = \langle M \rangle^0$.

(iii) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow {}^0(F_2) \subseteq {}^0(F_1)$.

(iv) ${}^0F = {}^0\langle F \rangle$.

Übungsaufgabe II-1.5. (Basics zur dualen Abbildung)

Beschreiben Sie das Verhalten der dualen Abbildungen zu den folgenden Vektorraumhomomorphismen.

(a) $\mathbb{Q}^3 \ni x \mapsto \lambda x \in \mathbb{Q}^3$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ jeweils über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(b) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4), \triangle, \cdot) \ni A \mapsto A \cap \{1,3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_6, \triangle, \cdot)$, jeweils über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

Übungsaufgabe II-1.6. (Dualisieren einer Komposition von Homomorphismen)

Es seien K ein Körper und U, V und W Vektorräume über K sowie $f \in \operatorname{Homo}(V,W)$ und $g \in \operatorname{Homo}(U,V)$. Zeigen Sie Lemma 21.5, also dass dann für die duale Abbildung der Komposition $f \circ g \in \operatorname{Homo}(U,W)$ gilt:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$