

## ÜBUNG II - 1 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 13. April 2026

### Übungsaufgabe II-1.1. (Basics zu Linearformen und Dualräumen)

- (a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Linearformen sind.
- (i)  $\mathbb{Q}_3 \ni (x, y, z) \mapsto x \in \mathbb{R}$  jeweils über  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
  - (ii)  $\mathbb{Z}_2^3 \ni (x, y, z) \mapsto x^3 \in \mathbb{Z}_2$  jeweils über  $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$
- (b) Es sei  $U$  ein Unterraum vom Vektorraum  $V$ . Zeigen Sie, dass  $U^*$  höchstens gleichmächtig zu  $V^*$  ist.

### Lösung.

- (a) (i)  $\mathbb{Q}_3 \ni (x, y, z) \mapsto x \in \mathbb{R}$  jeweils über  $\mathbb{Q}$  ist keine Linearform, denn der Zielraum ist  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{Q}$  und damit nicht der Körper des Ursprungsraums über sich selbst. Die Abbildung wird zu einer Linearform, wenn man den Bildraum auf  $\mathbb{Q}$  über  $\mathbb{Q}$  einschränkt, das ist gerade Teil von Beispiel 20.2.
- (ii)  $\mathbb{Z}_2^3 \ni (x, y, z) \mapsto x^3 \in \mathbb{Z}_2$  jeweils über  $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$  ist eine Linearform, denn in  $\mathbb{Z}_2$  ist  $x^3 = x$ , hier handelt es sich also um die Projektion auf die erste Koordinate, damit handelt es sich um eine Linearform, siehe auch Beispiel 20.2.
- (b) Um höchstens Gleichmächtigkeit der Mengen zu zeigen müssen wir eine Bijektion von  $U^*$  auf eine Teilmenge von  $V^*$  angeben. Eine naheliegende Möglichkeit dies zu tun ist, die Funktionen aus  $U^*$  auf ganz  $V^*$  fortzusetzen.

Sei also  $B_U$  eine Basis von  $U$  und  $B_V$  eine Basisergänzung von  $B_U$  zu einer Basis von  $V$ , also  $B_U \subseteq B_V$ . Sei  $f \in U^*$  beliebig. Wir definieren  $f_V$  als die eindeutige lineare Abbildung aus  $V^*$ , die  $f_V(u) = f(u)$  für alle  $u \in B_U$  und  $f_V(v) = 0$  für alle  $v \in B_V \setminus B_U$  erfüllt. Damit ist die Abbildung  $\Psi: U^* \rightarrow V^*$  mit  $\Psi(f) := f_V$  wohldefiniert.

Da für jedes  $f$  auch  $f_V$  eindeutig festgelegt ist und zwei Fortsetzungen genau dann übereinstimmen, wenn ihre Einschränkungen auf  $U$  übereinstimmen, ist  $\Psi$  injektiv und damit die Einschränkung der Abbildung  $\Psi$  auf ihr Bild (eine Teilmenge von  $V^*$ ) surjektiv und somit bijektiv.

**Übungsaufgabe II-1.2.** (Duale Basen)

Gegeben sei der Vektorraum  $\mathbb{Z}_3^2$  über  $\mathbb{Z}_3$  mit der Basis  $B := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ . Bestimmen Sie die Bilder der dualen Basiselemente an dem Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Lösung.**

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und nach Satz 20.10 entsprechen die Auswertungen gerade den Koeffizienten aus der Linearkombination, beide sind also  $\frac{1}{2} = 2$ .

**Übungsaufgabe II-1.3.** (Darstellung von Linearformen)

Es sei  $V := (\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \Delta, \cdot)$  über  $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$  mit den Basen  $B := (\{0\}, \{1\}, \{2\})$  und  $\widehat{B} := (\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\})$ .

- Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung von  $v := \{0, 2\}$  bzgl.  $B$  und der Darstellung der Linearform  $v^* := v \mapsto \#(v \cap \{1\})$  bzgl.  $B^*$ .
- Bestimmen Sie die Basiswechsellmatrizen  $\mathcal{T}_{\widehat{B} \leftarrow B}$  und  $\mathcal{T}_{\widehat{B}^* \leftarrow B^*}$ .
- Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung von  $v$  und  $v^*$  bzgl.  $\widehat{B}$  und  $\widehat{B}^*$  mithilfe der Basiswechsellmatrizen.

**Lösung.**

- Der Koordinatenvektor von  $\{0, 2\}$  ist gerade  $x = (1, 0, 1)^T$ , was man an der Standardbasis direkt ablesen kann.  
Der Koordinatenvektor zu  $v^*$  ergibt sich durch Auswerten an den Basismitgliedern von  $B$  und ist entsprechend  $(0, 1, 0)^T$ .

- (b) Die Bestimmung der Basiswechselmatrix  $\mathcal{T}_{\widehat{B} \leftarrow B}$  kennen wir bereits aus der Linearen Algebra I, hier ergibt sich

$$\mathcal{T}_{\widehat{B} \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und entsprechend Lemma 20.18 ist

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}^* \leftarrow B^*} = \mathcal{T}_{\widehat{B} \leftarrow B}^{-\top} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1\text{GM}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\text{GM}}$$

- (c) Es ergeben sich die Koordinatenvektoren

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Übungsaufgabe II-1.4. ((Prä-)Annihilatoren)

- (a) Bestimmen Sie eine Basis von  $\{(0, 1, 2)\}^0$  in  $\mathbb{R}_3^*$  über  $\mathbb{R}$ .
- (b) Es seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M_1, M_2 \subseteq V$  sowie  $F_1, F_2 \subseteq V^*$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:
- (i)  $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^0 \subseteq M_1^0$ .
  - (ii)  $M^0 = \langle M \rangle^0$ .
  - (iii)  $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow {}^0(F_2) \subseteq {}^0(F_1)$ .
  - (iv)  ${}^0F = {}^0\langle F \rangle$ .

#### Lösung.

- (a) Wir ergänzen  $\{(0, 1, 2)\}$  durch  $(1, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0)$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}_3$ . Deren duale Basis besteht nun aus 3 Elementen, ist eine Basis von  $\mathbb{R}_3^*$  und eines der Elemente ist nicht im Annihilator, während es die anderen beiden sind, also ist  $\{e_2^*, e_3^*\}$  eine Basis des

Annihilators. Bezüglich der dualen der kanonischen Basis haben diese die Darstellung in den hinteren beiden Spalten von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (b) (i) Ist  $M_1 \subseteq M_2$  und  $f \in M_2^0$ , dann ist  $f(m) = 0$  für alle  $m \in M_1 \subseteq M_2$ .  
 (ii) Da  $M \subseteq \langle M \rangle$  ist  $M^0 \supseteq \langle M \rangle^0$  klar. Die  $\subseteq$  Inklusion folgt sofort, da  $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(m_i) = 0$  für  $m_i \in M$ .  
 (iii) Ist  $F_1 \subseteq F_2$  und  $v \in {}^0F_2$ , dann ist  $f(v) = 0$  für alle  $v \in F_1 \subseteq F_2$ .  
 (iv) Da  $F \subseteq \langle F \rangle$  ist  ${}^0F \supseteq {}^0\langle F \rangle$  klar. Die  $\subseteq$  Inklusion folgt sofort, da  $(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(v) = 0$  für  $f_i \in F$ .

**Übungsaufgabe II-1.5.** (Basics zur dualen Abbildung)

Beschreiben Sie das Verhalten der dualen Abbildungen zu den folgenden Vektorraumhomomorphismen.

- (a)  $\mathbb{Q}^3 \ni x \mapsto \lambda x \in \mathbb{Q}^3$ ,  $\lambda \in \mathbb{Q}$  jeweils über  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$   
 (b)  $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4), \Delta, \cdot) \ni A \mapsto A \cap \{1, 3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_6, \Delta, \cdot)$ , jeweils über  $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

**Lösung.**

In der Lösung wird die Abbildung immer mit  $f$  bezeichnet und die duale mit  $f^*$ .

- (a) Für alle  $v^* \in \mathbb{Q}^3$  und  $v \in \mathbb{Q}$  ist

$$(f^*(v^*))(v) = (v^*)(f(v)) = v^*(\lambda v) = \lambda v^*(v) = (\lambda v^*)(v)$$

und damit ist die duale Abbildung der Skalierung die gleiche Skalierung der Abbildungen im Dualraum.

- (b) Die Abbildung  $f$  bildet jede Teilmenge von  $\mathbb{Z}_4$  auf deren Teilmenge der ungeraden Elemente ab. Entsprechend ist

$$f^*(v^*)(M) = v^*(f(M)).$$

Die duale Basis zur Punkt mengenbasis besteht aus Indikatorfunktionen zur Existenz der Punkte in dem eingesetzten Element  $M \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_4)$ . Jede Linearkombination zu einem  $v^*$  gibt also aus, ob eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Elementen der an  $v^*$  beteiligten Basiselemente in  $M$  enthalten sind. Die duale Abbildung ändert diese Abfrage auf die gerade oder ungerade Anzahl von ungeraden Elementen in  $M$ .

**Übungsaufgabe II-1.6.** (Dualisieren einer Komposition von Homomorphismen)

Es seien  $K$  ein Körper und  $U, V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  sowie  $f \in \text{Homo}(V, W)$  und  $g \in \text{Homo}(U, V)$ . Zeigen Sie Lemma 21.5, also dass dann für die duale Abbildung der Komposition  $f \circ g \in \text{Homo}(U, W)$  gilt:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

**Lösung.**

Für alle  $u \in U$  und  $w^* \in W$  ist

$$(f \circ g)^*(w^*)(u) = w^*((f \circ g)(u)) = w^*(\underbrace{f(g(u))}_w) = \underbrace{f^*(w^*)}_{v^*}(\underbrace{g(u)}_v) = \underbrace{g^*(f^*(w^*))}_{u^*}(u) = (g^* \circ f^*)(w^*).$$