

Anmerkungen zu diesem Dokument:

Für die Vorbereitung auf die von uns im SS 26 angebotenen Abschlussprüfungen möchten wir Ihnen gern zusätzliches Material zur Verfügung stellen. Unten stehend finden Sie zu diesem Zweck einige Aufgaben, deren Bearbeitung Sie in Ihre Vorbereitung einbeziehen können.

Bei der Verwendung dieses Materials muss Ihnen klar sein, dass es nicht möglich ist, Vorbereitungs-material zusammen zu stellen, das hinsichtlich Umfang und Schwierigkeitsgrad für jede/n von Ihnen mit den gewerteten Klausuren übereinstimmt. Ziehen Sie Rückschlüsse auf die gewerteten Klausuren an Hand dieses Dokument vorsichtig und seien Sie nicht überrascht, wenn sich dieses Dokument Ihrer Meinung nach in irgendeiner Komponente (Umfang, Schwierigkeit, Themenauswahl...) deutlich von den gewerteten Klausuren unterscheiden. Die unten stehenden Aufgaben geben vor allem Aufschluss darüber, wie typische Klausuraufgaben sich im *Stil* von den Übungsaufgaben unterscheiden, die Sie das Semester über bearbeitet haben.

Ansonsten gilt Folgendes:

- Das Layout dieses Dokuments entspricht ab der nächsten Seite im Wesentlichen dem voraussichtlichen Layout der Klausuren. Seite 2 dieses Dokuments ist die Titelseite und die folgenden Seiten gehören immer nebeneinander.
- Die „Musterlösungen“, die wir veröffentlichen, sind bewusst nur als Skizzen für die Selbstkontrolle formuliert. Sie entsprechen weder einer Optimallösung noch einer Minimallösung.

KLAUSURVORBEREITUNG

23. Juli 2026

Nachname:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die reguläre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen Ihre Antworten auf Deutsch oder auf Englisch verfassen.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden“ bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Soll ein Antwortteil nicht gewertet werden, dann müssen Sie ihn durchstreichen.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (15 P.)	2 (20 P.)	3 (14 P.)	4 (17 P.)	5 (17 P.)	6 (17 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch)

15 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen*. In dieser Aufgabe soll die **Gültigkeit des Auswahlaxioms** vorausgesetzt werden.

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

- | | W | F | |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| (1) | ☒ | ☐ | Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet. |
| (2) | ☐ | ☒ | Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet. |
| (3) | ☒ | ☒ | Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet. |
| (4) | ☒ | ☐ | Wird nicht gewertet. |
| (5) | ☒ | ☒ | Wird nicht gewertet. |
| (6) | ☐ | ☐ | Wird nicht gewertet. |

(Bi-/Dualität) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

- | | W | F | |
|-----|--------------------------|--------------------------|--|
| (1) | ☐ | ☐ | Existiert $f \in V^* \cap \text{Endo}(V)$, dann ist $V = K$. |
| (2) | ☐ | ☐ | Sind U und W komplementäre Unterräume von V , dann ist $U^0 = W$. |
| (3) | ☐ | ☐ | $(V^{**})^{**} = V$ |

(Multilinearität) Für den folgenden Fragenblock seien K ein Körper, V und W zwei endlich-dimensionale K -Vektorräume und $(V \otimes W, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V und W .

- | | W | F | |
|-----|--------------------------|--------------------------|--|
| (4) | ☐ | ☐ | Es gilt $v \otimes w = 0$ genau dann, wenn $v = 0$. |
| (5) | ☐ | ☐ | Der Rang jedes Tensors in $V \otimes W$ stimmt mit dem Rang seiner Komponentenmatrizen überein. |
| (6) | ☐ | ☐ | Sind $f \in \text{Endo}(V)$ und $g \in \text{Endo}(W)$, dann ist $f \boxtimes g \in \text{Endo}(V \otimes W)$. |

(Eigenwerte und -vektoren) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum.

- | | W | F | |
|-----|--------------------------|--------------------------|---|
| (7) | ☐ | ☐ | Für jedes $\lambda \in K$ existiert ein $f \in \text{Endo}(V)$, welcher λ als Eigenwert hat. |
| (8) | ☐ | ☐ | Ist V endlich-dimensional und stimmen die charakteristischen Polynome von $f, g \in \text{Endo}(V)$ überein, dann ist $f = g$. |
| (9) | ☐ | ☐ | Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f \in \text{Endo}(V)$, dann ist $1 - \lambda$ Eigenwert von f^* . |

(Normalformen von Endomorphismen) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{Endo}(V)$.

- | | W | F | |
|------|--------------------------|--------------------------|--|
| (10) | ☐ | ☐ | Ist f diagonalisierbar, dann ist f^2 diagonalisierbar. |
| (11) | ☐ | ☐ | Die Größe des größten Diagonalblocks zu einem Eigenwert $\lambda \in K$ in der Jordan-Normalform von f ist die Vielfachheit von λ in μ_f . |
| (12) | ☐ | ☐ | Ist f diagonalisierbar, dann ist die Frobeniusnormalform von f ebenfalls diagonal. |

(Innenprodukträume über $\mathbb{R}$) Für den folgenden Fragenblock sei (V, γ) ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{Endo}(V)$.

- | | W | F | |
|------|--------------------------|--------------------------|--|
| (13) | ☐ | ☐ | Für $v \in \text{Kern}(f)$ ist $v^\perp$ ein f -invarianter Unterraum. |
| (14) | ☐ | ☐ | Es gibt $E \subseteq V$ mit $E = E^\perp$. |
| (15) | ☐ | ☐ | Es gibt einen diagonalisierbaren Endomorphismus aus $\text{Endo}(V)$, welcher nicht γ -orthogonal ist. |

Aufgabe 2.

20 Punkte

Gegeben sei ein K -Vektorraum V mit den Basis $B = (v_1, v_2, v_3)$ und $\widehat{B} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ und den dazugehörigen dualen Basen $B^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ und $\widehat{B}^* = (\hat{v}_1^*, \hat{v}_2^*, \hat{v}_3^*)$ von V^* .

Zeigen Sie, dass $v_1^* = \hat{v}_1^*$ genau dann gilt, wenn $\langle \hat{v}_2, \hat{v}_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$ und $\hat{v}_1 \in v_1 + \langle v_2, v_3 \rangle$ gilt.

Lösung.

Aufgabe 3.

14 Punkte

Gegeben seien endlichdimensionale K -Vektorräume $\widehat{V}, \widehat{W}$ und Unterräume $V \subseteq \widehat{V}$ und $W \subseteq \widehat{W}$. Weiterhin seien $(V \otimes W, \otimes)$ und $(\widehat{V} \widehat{\otimes} \widehat{W}, \widehat{\otimes})$ Tensorprodukte.

Zeigen Sie, dass $(V \otimes W, \otimes)$ und $(\langle \{v \widehat{\otimes} w \mid v \in V, w \in W\} \rangle, \widehat{\otimes}|_{V \times W})$ isomorph im Sinne von Tensorprodukten ist.

Lösung.

Aufgabe 4.

17 Punkte

Bestimmen Sie, sofern möglich, die Diagonalform und die Jordan-Normalform der unten stehenden reellen Darstellungsmatrizen entsprechender Endomorphismen. Geben Sie für jede der Formen, welche nicht erreicht werden kann, eine Begründung an.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung.

Aufgabe 5.

17 Punkte

Entscheiden und begründen Sie, welche der unten stehenden reellen Matrizen

- (a) in Diagonalform vorliegen,
- (b) in Jordan-normalform vorliegen,
- (c) in Frobenius-normalform vorliegen,

und bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösung.

Aufgabe 6.

9 + 8 = 17 Punkte

Gegeben seien reelle Innenprodukträume (V, γ_V) und (W, γ_W) mit $\dim(V), \dim(W) \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass mittels bilinearer Fortsetzung über

$$\gamma_{\otimes}(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) := \gamma_V(v_1, v_2) \gamma_W(w_1, w_2) \quad \text{für } v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$$

ein Innenprodukt auf $V \otimes W$ definiert ist. Sie dürfen voraussetzen, dass $\gamma_{\otimes}$ wohldefiniert ist.

- (b) Zeigen Sie, dass für γ_V - bzw. γ_W -orthogonale $f \in \text{Endo}(V)$, $g \in \text{Endo}(W)$ die Abbildung $f \boxtimes g$ $\gamma_{\otimes}$ -orthogonal ist.

Lösung.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 1.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 2.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 3.