R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Lösungen(!!!)

Klausurvorbereitung

23. Juli 2026

Nachname:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die reguläre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen Ihre Antworten auf Deutsch oder auf Englisch verfassen.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden“ bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Soll ein Antwortteil nicht gewertet werden, dann müssen Sie ihn durchstreichen.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (15 P.)	2 (20 P.)	3 (14 P.)	4 (17 P.)	5 (17 P.)	6 (17 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch) 15 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen*. In dieser Aufgabe soll die **Gültigkeit des Auswahlaxioms** vorausgesetzt werden.

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

	W	F	
(1)	X		Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet.
(2)		X	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(3)	■	X	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(4)	■		Wird nicht gewertet.
(5)	X	X	Wird nicht gewertet.
(6)			Wird nicht gewertet.

(Bi-/Dualität) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

	W	F	
(1)	X		Existiert $f \in V^* \cap \mathrm{Endo}(V)$, dann ist $V = K$.
(2)		X	Sind U und W komplementäre Unterräume von V, dann ist $U^0 = W$.
(3)		X	$(V^{**})^{**} = V$

(Multilinearität) Für den folgenden Fragenblock seien K ein Körper, V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $(V \otimes W, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V und W.

	W	F	
(4)		X	Es gilt $v \otimes w = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.
(5)	X		Der Rang jedes Tensors in $V \otimes W$ stimmt mit dem Rang seiner Komponentenmatrizen überein.
(6)	X		Sind $f \in \mathrm{Endo}(V)$ und $g \in \mathrm{Endo}(W)$, dann ist $f \boxtimes g \in \mathrm{Endo}(V \otimes W)$.

(Eigenwerte und -vektoren) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum.

	W	F	
(7)		X	Für jedes $\lambda \in K$ existiert ein $f \in \mathrm{Endo}(V)$, welcher λ als Eigenwert hat.
(8)		X	Ist V endlich-dimensional und stimmen die charakteristischen Polynome von $f, g \in \mathrm{Endo}(V)$ überein, dann ist $f = g$.
(9)		X	Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f \in \mathrm{Endo}(V)$, dann ist $1 - \lambda$ Eigenwert von f^*.

(Normalformen von Endomorphismen) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathrm{Endo}(V)$.

	W	F	
(10)	X		Ist f diagonalisierbar, dann ist f^2 diagonalisierbar.
(11)	X		Die Größe des größten Diagonalblocks zu einem Eigenwert $\lambda \in K$ in der Jordan-Normalform von f ist die Vielfachheit von λ in μ_f.
(12)		X	Ist f diagonalisierbar, dann ist die Frobeniusnormalform von f ebenfalls diagonal.

(Innenprodukträume über $\mathbb{R}$) Für den folgenden Fragenblock sei (V, γ) ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathrm{Endo}(V)$.

	W	F	
(13)		X	Für $v \in \mathrm{Kern}(f)$ ist $v^\perp$ ein f-invarianter Unterraum.
(14)		X	Es gibt $E \subseteq V$ mit $E = E^\perp$.
(15)	X		Es gibt einen diagonalisierbaren Endomorphismus aus $\mathrm{Endo}(V)$, welcher nicht γ-orthogonal ist.

Lösung.

Jeweils ein Punkt pro Aussage möglich, also maximal (15 Punkte)

(1) Ist wahr, denn wenn der Schnitt nicht leer ist, dann muss $\mathrm{Homo}(V, V) = \mathrm{Endo}(V) = V^* = \mathrm{Homo}(V, K)$ sein und damit $K = V$.

(2) Ist falsch, denn der Annihilator liegt nicht in V sondern in V^*.

(3) Ist falsch, sie sind wenn überhaupt dann isomorph.

(4) Ist falsch, $v \otimes w = 0$ genau dann wenn $v = 0$ oder $w = 0$ ist.

(5) Ist wahr, Satz 23.38.

(6) Ist wahr, so haben wir die Tensorabbildungen definiert, siehe Definition 23.30.

(7) Ist falsch, denn V könnte ein Nullraum sein, dann gibt es keine Eigenvektoren.

(8) Ist falsch, die Projektoren auf die erste und zweite Koordinate eines zweidimensionalen Raums mit Basis haben beide das gleiche charakteristische Polynom.

(9) Ist falsch, siehe die Identität $f = \mathrm{id}_V$ mit $f^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

(10) Ist wahr, die Diagonalform von f^2 ist dann das Quadrat der Diagonalform von f.

(11) Ist wahr, die Jordan-Normalform wird vom Minimalpolynom annuliert, das arbeitet blockweise und benötigt genau diese Potenz um den größten Block zu annulieren.

(12) Ist falsch, die FNF kann Diagonal-/Eigenwertstruktur zerstören, das sieht man an der Diagonalform $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(13) Ist falsch, siehe beispielsweise $f \in \mathrm{Endo}(\mathbb{R}^2)$ mit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $v = e_1$ für das euklidische Innenprodukt.

(14) Ist falsch, das gilt genau dann, wenn V ein Nullraum ist.

(15) Ist wahr, siehe zum Beispiel 2 id, welche nicht längentreu ist.

Aufgabe 2. 20 Punkte

Gegeben sei ein K-Vektorraum V mit den Basis $B = (v_1, v_2, v_3)$ und $\widehat{B} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ und den dazugehörigen dualen Basen $B^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ und $\widehat{B}^* = (\hat{v}_1^*, \hat{v}_2^*, \hat{v}_3^*)$ von V^*.

Zeigen Sie, dass $v_1^* = \hat{v}_1^*$ genau dann gilt, wenn $\langle \hat{v}_2, \hat{v}_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$ und $\hat{v}_1 \in v_1 + \langle v_2, v_3 \rangle$ gilt.

Lösung.

Per Definition der dualen Basiselemente gilt

$$\mathrm{Kern}(v_1^*) = \langle v_2, v_3 \rangle \quad \text{und} \quad \mathrm{Kern}(\hat{v}_1^*) = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_3 \rangle.$$

„$\Rightarrow$“: Ist $v_1^* = \hat{v}_1^*$, dann haben die beiden Funktionen auch den gleichen Kern, also ist $\langle v_2, v_3 \rangle = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_3 \rangle$.

Nun existiert bezüglich B eine Basisdarstellung von $\hat{v}_1$ der Form $\hat{v}_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ und es gilt per Definition/wegen der Koordinatenermittlereigenschaft und der Übereinstimmung von v_1^* und $\hat{v}_1^*$:

$$\alpha_1 = v_1^*(\hat{v}_1) = \hat{v}_1^*(\hat{v}_1) = 1.$$

„$\Leftarrow$“: Nach Voraussetzung stimmen die Kerne von v_1^* und $\hat{v}_1^*$ überein und sind $\langle v_2, v_3 \rangle = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_3 \rangle$.

Für beliebiges $v \in V$ gibt es nun eine eindeutige Darstellung $v = \alpha v_1 + v_{2,3}$ mit $v_{2,3} \in \langle v_2, v_3 \rangle$ und es gilt per Definition/wegen der Koordinatenermittlereigenschaft

$$v_1^*(v) = v_1^*(\alpha v_1 + v_{2,3}) = \alpha = \hat{v}_1^*(\underbrace{\alpha v_1 - \alpha \hat{v}_1}_{\in \mathrm{Kern}(\hat{v}_1^*)} + \alpha \hat{v}_1 + \underbrace{v_{2,3}}_{\in \mathrm{Kern}(\hat{v}_1^*)}) = \hat{v}_1^*(\alpha v_1 + v_{2,3}) = \hat{v}_1^*(v).$$

(20 Punkte)

Aufgabe 3. 14 Punkte

Gegeben seien endlichdimensionale K-Vektorräume $\widehat{V}, \widehat{W}$ und Unterräume $V \subseteq \widehat{V}$ und $W \subseteq \widehat{W}$. Weiterhin seien $(V \otimes W, \otimes)$ und $(\widehat{V} \,\widehat{\otimes}\, \widehat{W}, \widehat{\otimes})$ Tensorprodukte.

Zeigen Sie, dass $(V \otimes W, \otimes)$ und $(\langle\{v \widehat{\otimes} w \mid v \in V, w \in W\}\rangle, \widehat{\otimes}|_{V\times W})$ isomorph im Sinne von Tensorprodukten ist.

Lösung.

Wir müssen zeigen, dass die Tensorproduktträume als Vektorräume isomorph sind und dass die dazugehörigen universellen bilinearen Abbildungen miteinander verträglich sind, also dass sie durch einen linearen Isomorphismus ineinander übergehen. Ab hier markieren wir in der Notation nicht mehr die Einschränkung von $\widehat{\otimes}$ auf $V \times W$.

Wir können Basen B_V und B_W zu Basen von $B_{\widehat{V}}$ und $B_{\widehat{W}}$ ergänzen. Dann ist $\{v \widehat{\otimes} w \mid v \in B_V, w \in B_W\}$ als Teilmenge der Tensorproduktbasis zu B_V und B_W linear unabhängig und aus Darstellungen

$$V \ni v_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} v_i,\ v_i \in B_V \qquad \text{und} \qquad W \ni w_k = \sum_{j=1}^{m} \beta_{kj} w_j,\ w_j \in B_W$$

folgt wegen der Bilinearität von $\widehat{\otimes}$ sofort, dass

$$\sum_{k=1}^{l} \gamma_k v_k \widehat{\otimes} w_k = \sum_{k=1}^{l} \gamma_k \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} v_i\right) \widehat{\otimes} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{kj} w_j\right) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\beta_{kj}\gamma_k v_i \widehat{\otimes} w_j$$

und somit, dass $\{v \widehat{\otimes} w \mid v \in B_V, w \in B_W\}$ eine Basis von $\langle\{v \widehat{\otimes} w \mid v \in V, w \in W\}\rangle$ ist und natürlich die gleiche Mächtigkeit wie die Tensorproduktbasis von $(V \otimes W, \otimes)$ hat. Damit sind die Tensorproduktträume als Vektorräume schonmal isomorph, denn man erhält zum Beispiel einen Isomorphismus der Form

$$I\colon \langle\{v \widehat{\otimes} w \mid v \in V, w \in W\}\rangle \to V \otimes W$$

als die lineare Fortsetzung der Basenvorschrift

$$I\colon B_V \widehat{\otimes} B_W \ni v \widehat{\otimes} w \mapsto v \otimes w \in B_V \otimes B_W.$$

Für dieses I gilt natürlich per Definition auch

$$(I \circ \widehat{\otimes})(v, w) = I(v \widehat{\otimes} w) = v \otimes w = \otimes(v, w)$$

für alle $v \in V, w \in W$, also $I \circ \widehat{\otimes} = \otimes$. (14 Punkte)

Alternativ kann man auch indirekt zeigen, dass $\langle\{v \widehat{\otimes} w \mid v \in V, w \in W\}\rangle$ mit der Einschränkung von $\widehat{\otimes}$ ein Tensorprodukt auf $V \times W$ ist und dann über Eindeutigkeit bis auf Isomorphie im Tensorproduktsinn argumentieren, hierfür muss man aber Fortsetzungen von Bilinearformen definieren, was auch nicht weniger aufwändig ist.

Aufgabe 4. 17 Punkte

Bestimmen Sie, sofern möglich, die Diagonalform und die Jordan-Normalform der unten stehenden reellen Darstellungsmatrizen entsprechender Endomorphismen. Geben Sie für jede der Formen, welche nicht erreicht werden kann, eine Begründung an.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung.

Für A erkennt man anhand der Blockdiagonalstruktur, dass man das charakteristische Polynom als Produkt der charakteristischen Polynome der Blöcke erhält. Diese bestimmt man per 2×2 Merkregel oder über das Erkennen der Begleitmatrixstruktur in den Blöcken als

$$\chi_A = (t-0)(t^2+1)^2.$$

Der über $\mathbb{R}$ irreduzible Faktor (t^2+1) zeigt, dass das Polynom nicht in Linearfaktoren zerfällt, damit ist keine Jordan-Normalform möglich, und damit auch keine Diagonalform, diese würde dann nämlich mit der Jordan-Normalform übereinstimmen.

Für B erhält man

$$tI - B = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

Man entwickelt die Determinante nach der ersten Spalte und erhält

$$\chi_B = t \cdot \det \begin{pmatrix} t & 0 & -4 & 0 \\ 0 & t & 0 & -4 \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

und die verbleibende Determinante erhält man entweder über das Resultat von Silvester aus der Plenarübung (weil die 2×2 Blöcke diagonal sind, also in einem kommutativen Unterring von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ liegen) als

$$\det \begin{pmatrix} t & 0 & -4 & 0 \\ 0 & t & 0 & -4 \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & t \end{pmatrix} = \det_{\mathbb{R}} \left(\det_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \begin{pmatrix} t & 0 & -4 & 0 \\ 0 & t & 0 & -4 \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & t \end{pmatrix} \right) = \det_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} t^2-4 & 0 \\ 0 & t^2-4 \end{pmatrix} = (t^2-4)^2 = (t-2)^2(t+2)^2$$

oder per Hand über Zeilenstufentransformationen bis Blocktrigonalstruktur erreicht ist via

$$\chi_B = t \cdot \det \begin{pmatrix} t & 0 & -4 & 0 \\ 0 & t & 0 & -4 \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & t \end{pmatrix} = t \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & t \\ 0 & 0 & t^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-4 \end{pmatrix}$$

und damit $\chi_B = t(t-2)^2(t+2)^2$, womit schonmal eine Jordan-Normalform erreicht werden kann, da das Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Die Eigenwerte ± 2 müssen aber noch auf geometrische

Vielfachheit untersucht werden, hier ist

$$\dim(\mathrm{Eig}(B,2)) = \dim\left(\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&0&-4&0\\0&0&2&0&-4\\0&-1&0&2&0\\0&0&-1&0&2\end{pmatrix}\right) = 4 - \mathrm{Rang}\begin{pmatrix}2&0&-4&0\\0&2&0&-4\\-1&0&2&0\\0&-1&0&2\end{pmatrix} = 2$$

$$\dim(\mathrm{Eig}(B,-2)) = \dim\left(\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}-2&0&0&0&0\\0&-2&0&-4&0\\0&0&-2&0&-4\\0&-1&0&-2&0\\0&0&-1&0&-2\end{pmatrix}\right) = 4 - \mathrm{Rang}\begin{pmatrix}-2&0&-4&0\\0&-2&0&-4\\-1&0&-2&0\\0&-1&0&-2\end{pmatrix} = 2$$

und B daher diagonalisierbar mit Diagonalform (und daher auch Jordan-Normalform)

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}.$$

(17 Punkte)

Aufgabe 5. 17 Punkte

Entscheiden und begründen Sie, welche der unten stehenden rellen Matrizen

(a) in Diagonalform vorliegen,

(b) in Jordan-normalform vorliegen,

(c) in Frobenius-normalform vorliegen,

und bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösung.

In Diagonalform liegt nur A vor, das ist offensichtlich.

In Jordan-Normalform liegt ebenfalls nur A vor, in den anderen Matrizen stehen nicht-Null Einträge in anderen Nebendiagonalen als der zum Index 1.

In Frobeniusnormalform liegen A und D vor. Für die Matrix A lässt sich auf Grund der fehlenden Einsen auf der -1-ten Nebendiagonalen nur die Form mit 1×1 Blöcke identifizieren, davon gibt es 5 Stück, jeweils zu den Polynomen $t - 5$, die sich natürlich alle teilen. Die Matrix D hat die Blockeinteilung

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Blöcke gehören zu den Polynomen t^5 und t, welche die Teilerbeziehung erfüllen und echt absteigenden Grad hab.

Die Matrix B hat durchgehend 1en auf der -1-ten Nebendiagonalen aber sonst nur Einträg auf der Diagonalen, statt in der letzten Spalte und ist damit keine Begleitmatrix. Die Matrix C lässt nur die Blockzerlegung in Begleitmatrizen der Form

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Die Blöcke gehören zu den Polynomen $t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1$ und $t^2 - t - 2$, die sich nicht teilen können, da das Polynom vierten Grades keinen quadratischen Anteil hat, aber das Polynom zweiten Grades einen konstanten Anteil hat. Durch Polynomdivision findet man $t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$ und $t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1 = (t^2+1)(t-1)^2$ und damit die Eigenwerte $-1, 1$ und 2.

Alle restlichen Matrizen haben Trigonalgestalt und die Eigenwerte lassen sich direkt auf der Diagonalen finden, für A und B ist das 5, für C ist das 0 und für D ist es lediglich 0. (17 Punkte)

Aufgabe 6. 9 + 8 = 17 Punkte

Gegeben seien reelle Innenprodukträume (V, γ_V) und (W, γ_W) mit $\dim(V), \dim(W) \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass mittels bilinearer Fortsetzung über

$$\gamma_\otimes(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) \coloneqq \gamma_V(v_1, v_2)\, \gamma_W(w_1, w_2) \quad \text{für } v_1, v_2 \in V,\ w_1, w_2 \in W$$

ein Innenprodukt auf $V \otimes W$ definiert ist. Sie dürfen voraussetzen, dass $\gamma_\otimes$ wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass für γ_V- bzw. γ_W-orthogonale $f \in \mathrm{Endo}(V)$, $g \in \mathrm{Endo}(W)$ die Abbildung $f \boxtimes g$ $\gamma_\otimes$-orthogonal ist.

Lösung.

(a) Die Wohldefiniertheit ist tatsächlich etwas kniffliger und daher als Klausuraufgabe ungeeignet, ich gebe hier trotzdem einen Beweis für diejenigen, die ihn nachvollziehen oder zur Übung selbst führen und dann kontrollieren wollen: Die Definitionsvorschrift ist offensichtlich nur für das kartesische Produkt einfacher Tensoren angegeben und muss auf den gesamten $V \otimes W \times V \otimes W$ erweitert werden. Die Abbildung $\mathrm{Bil}(V \otimes W, V \otimes W; \mathbb{R}) \ni \gamma \mapsto (s \mapsto (t \mapsto (\gamma(s,t)))) \in \mathrm{Homo}(V \otimes W, (V \otimes W)^*)$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen, wie man analog zu der Untersuchung von Bilinearformen auf Vektorräumen nachprüfen kann. Die Vorschrift ist also genau dann eine Bilinearform auf $V \otimes W$, wenn sie einen Homomorphismus von $V \otimes W$ nach $(V \otimes W)^*$ definiert. Für jeden festen einfachen Tensor $v_1 \otimes w_1$ ist die Vorschrift $v_2 \otimes w_2 \mapsto \gamma_V(v_1, v_2)\gamma_W(w_1, w_2)$ bilinear in (v_2, w_2), denn für $v_2, w_2, \hat{w}_2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist wegen der Bilinearität der Innenprodukte γ_V und γ_W

$$\begin{aligned}\gamma_V(v_1, v_2)\gamma_W(w_1, w_2 + \alpha\hat{w}_2) &= \gamma_V(v_1, v_2)\,(\gamma_W(w_1, w_2) + \alpha\gamma_W(w_1, \hat{w}_2)) \\ &= \gamma_V(v_1, v_2)\gamma_W(w_1, w_2) + \alpha\gamma_V(v_1, v_2)\gamma_W(w_1, \hat{w}_2)\end{aligned}$$

und analog erhält man die Linearität des anderen Eingangs. Die universelle Eigenschaft in $(V \otimes W, \otimes)$ für den Zielraum $\mathbb{R}$ liefert, dass wir für jeden einfachen Tensor $v_1 \otimes w_1$ eine eindeutige lineare Abbildung $f_{(v_1, w_1)} \in \mathrm{Homo}(V \otimes W, \mathbb{R}) = (V \otimes W)^*$ erhalten, die die vorgegebenen Werte annimmt. GM Die Zuordnung $(v_1, w_1) \mapsto f_{(v_1, w_1)}$ ist ebenfalls bilinear, denn auf den einfachen Tensoren der Form $v_2 \otimes w_2$ gilt ja für $v_1, w_1, \hat{w}_1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f_{(v_1, w_1 + \alpha\hat{w}_1)}(v_2 \otimes w_2) &= \gamma_V(v_1, v_2)\gamma_W(w_1 + \alpha\hat{w}_1, w_2) \\ &= \gamma_V(v_1, v_2)\gamma_W(w_1, w_2) + \alpha\gamma_V(v_1, v_2)\gamma_W(\hat{w}_1, w_2) \\ &= f_{(v_1, w_1)}(v_2 \otimes w_2) + \alpha f_{(v_1, \hat{w}_1)}(v_2 \otimes w_2)\end{aligned}$$

die beiden dualen Abbildung $f_{(v_1, w_1 + \alpha\hat{w}_1)}$ und $f_{(v_1, w_1)} + \alpha f_{(v_1, \hat{w}_1)}$ stimmen also auch auf einer Basis von $V \otimes W$ überein und stimmen daher überein. Analog erhält man Linearität des zweiten Eingangs und damit die Bilinearität, womit die universelle Eigenschaft in $(V \otimes W, \otimes)$ für den Zielraum $(V \otimes W)^*$ wieder eine eindeutige Abbildung liefert, womit wir **Wohldefiniertheit** nachgewiesen haben. GM

Wir überprüfen nun weiter die definierenden Eigenschaften von Innenprodukten. Wir kriegen **Bilinearität** dabei weitestgehend geschenkt, denn wir haben $\gamma_\otimes$ ja gerade über bilineare Fortsetzung definiert.

Die symmetrische Definition auf den einfachen Tensoren überträgt sich direkt auf die **Symmetrie** der Gesamtabbildung, denn wegen der Bilinearität von $\gamma_\otimes$ und der Symmetrie von γ_V und γ_W ist

$$\gamma_\otimes\left(\sum_{i=1}^{k} v_{1i} \otimes w_{1i}, \sum_{j=1}^{l} v_{2j} \otimes w_{2j}\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \gamma_\otimes\left(v_{1i} \otimes w_{1i}, v_{2j} \otimes w_{2j}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \gamma_V\left(v_{1i}, v_{2j}\right)\gamma_W\left(w_{1i}, w_{2j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \gamma_V\left(v_{2j}, v_{1i}\right)\gamma_W\left(w_{2j}, w_{1i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \gamma_\otimes\left(v_{2j}\otimes w_{2j}, v_{1i}\otimes w_{1i}\right)\\
&= \gamma_\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} v_{2j}\otimes w_{2j}, \sum_{i=1}^{k} v_{1i}\otimes w_{1i}\right).
\end{aligned}
$$

Für die **positive Definitheit** wählen wir Orthonormalbasen $(v_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ und $(w_j)_{j\in[\![1,l]\!]}$, dann ist für beliebige Koeffizienten $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\otimes\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_{ij}v_i\otimes w_j, \sum_{\hat{i}=1}^{k}\sum_{\hat{j}=1}^{l}\alpha_{\hat{i}\hat{j}}v_{\hat{i}}\otimes w_{\hat{j}}\right) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\hat{i}=1}^{k}\sum_{\hat{j}=1}^{l}\alpha_{ij}\alpha_{\hat{i},\hat{j}}\underbrace{\gamma_V(v_i,v_{\hat{i}})}_{\delta_{i\hat{i}}}\underbrace{\gamma_V(w_j,w_{\hat{j}})}_{\delta_{j\hat{j}}}\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_{ij}^2
\end{aligned}
$$

was nach unten durch Null beschränkt ist und genau dann Null, wenn alle Koeffizienten 0 sind. (9 Punkte)

(b) Es ist

$$
\begin{aligned}
\gamma_\otimes\left(f\boxtimes g\left(\sum_{i=1}^{n}v_{1i}\otimes w_{1i}\right), f\boxtimes g\left(\sum_{j=1}^{n}v_{2j}\otimes w_{2j}\right)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_\otimes(f\boxtimes g(v_{1i}\otimes w_{1i}), f\boxtimes g(v_{2j}\otimes w_{2j}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_\otimes(f(v_{1i})\otimes g(w_{1i}), f(v_{2j})\otimes g(w_{2j}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_V(f(v_{1i})\otimes f(v_{2j}))\gamma_W(g(w_{1i})\otimes g(w_{2j}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_V(v_{1i}\otimes v_{2j})\gamma_W(w_{1i}\otimes w_{2j}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_\otimes(v_{1i}\otimes w_{1i}, v_{2j}\otimes w_{2j})\\
&= \gamma_\otimes\left(\left(\sum_{i=1}^{n}v_{1i}\otimes w_{1i}\right), \left(\sum_{j=1}^{n}v_{2j}\otimes w_{2j}\right)\right).
\end{aligned}
$$

(8 Punkte)