R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 13

Ausgabedatum: 26. Januar 2026
Abgabedatum: 2. Februar 2026

Übungsaufgabe I-13.1. (Koordinatendatendarstellung von Vektoren)

Gegeben seien die folgenden Kombinationen von Vektorräumen V mit Basen B und Vektoren $v \in V$. Bestimmen Sie für jede Kombination die Koordinatendarstellung von v bzgl. B.

(a) $V \coloneqq \mathbb{R}^4$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $B \coloneqq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $v \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $V \coloneqq (\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}), \triangle, \odot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, $B \coloneqq (\{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,4\}, \{1,2\})$, $v \coloneqq \{2,3,4\}$

Übungsaufgabe I-13.2. (Darstellungsmatrizen)

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen aus Übungsaufgabe I-11.3 Teilaufgabe (a), sofern dies möglich ist, jeweils bzgl. der Standardbasen der entsprechenden Vektorräume.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der unten stehenden linearen Abbildung

  (i) $(\mathcal{P}(\llbracket 1,3 \rrbracket), \triangle, \cdot) \ni M \mapsto M \cap \{1,3\} \in (\mathcal{P}(\llbracket 1,4 \rrbracket), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bzgl. der Basen

$$(\{1,2,3\},\ \{1,3\},\ \{1\ \cancel{2}\}) \quad \text{und} \quad (\{1,2\},\ \{2\},\ \{3,4\},\ \{4\}).$$

  (ii) $(\mathcal{P}(\llbracket 1,4 \rrbracket), \triangle, \cdot) \ni M \mapsto e_M \in ((\mathbb{Z}_2)^{\llbracket 1,5 \rrbracket}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bzgl. der Basen

$$(\{1,2\},\ \{2\},\ \{3,4\},\ \{4\}) \quad \text{und} \quad (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ e_3 + e_4,\ e_4 + e_5),$$

  wobei e_M die Elemente aus M auf 1 und jedes andere Argument auf 0 abbildet.

(iii) Die Komposition der beiden obigen Abbildungen bzgl. der Basen

$$(\{1,2,3\},\ \{1,3\},\ \{1\}) \quad \text{und} \quad (e_1,\ e_1+e_2,\ e_2+e_3,\ e_3+e_4,\ e_4+e_5).$$

Hinweis: Hier können Sie sich mit einem Resultat aus dem Skript den Großteil der Arbeit sparen.

Übungsaufgabe I-13.3. (Links- bzw. Rechtsinvertierbarkeit linearer Abbildungen und ihrer Darstellungsmatrizen)

Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit $\dim(V) = m \in \mathbb{N}_0$ und $\dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f \colon V \to W$ ein Homomorphismus. Schließlich sei $A \coloneqq \mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f) \in K^{n \times m}$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. dieser Basen. Zeigen Sie Satz 19.14, also die folgenden Aussagen:

(a) Es sind äquivalent:
   - (i) f ist surjektiv, also $\operatorname{Rang}(f) = n$.
   - (ii) Es existiert eine Rechtsinverse von f, also eine lineare Abbildung $f_r \colon W \to V$, sodass $f \circ f_r = \operatorname{id}_W$ gilt. f_r ist notwendig injektiv.
   - (iii) A besitzt vollen Zeilenrang, also $\operatorname{Rang}(A) = n$.
   - (iv) Es existiert eine Rechtsinverse von A, also eine Matrix $R \in K^{m \times n}$ mit $A\,R = I_n$ gilt. R besitzt notwendig vollen Spaltenrang.

(b) Es sind äquivalent:
   - (i) f ist injektiv, also $\operatorname{Defekt}(f) = 0$, d. h. $\operatorname{Rang}(f) = m$.
   - (ii) Es existiert eine Linksinverse von f, also eine lineare Abbildung $f_l \colon V \to W$, sodass $f_l \circ f = \operatorname{id}_V$ gilt. f_l ist notwendig surjektiv. Ihre Einschränkung $f_l|_{f(V)}$ auf das Bild von f ist eindeutig.
   - (iii) A besitzt vollen Spaltenrang, also $\operatorname{Rang}(A) = m$.
   - (iv) Es existiert eine Linksinverse von A, also eine Matrix $L \in K^{n \times m}$ mit $L\,A = I_m$ gilt. L besitzt notwendig vollen Zeilenrang.

Hausaufgabe I-13.1 (Koordinatendarstellung in unendlich-dimensionalen Räumen) 4 Punkte

In Satz 19.1 werden Koordinaten(vektoren), Synthese- und Analyseabbildung für endlichdimensionale Vektorräume eingeführt. Entscheiden Sie, ob sich dieses Konzept auf unendlichdimensionale Vektorräume verallgemeinern lässt, und beschreiben Sie, wie die entsprechenden Aussagen und Konzepte angepasst werden müssten.

Hausaufgabe I-13.2 (möglichst einfache Darstellungsmatrizen für lineare Abbildungen) 6 Punkte

Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit $\dim(V) = m \in \mathbb{N}_0$ und $\dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus mit $r = \operatorname{Rang}(f)$ und $\operatorname{Defekt}(f) = \dim(\operatorname{Kern}(f)) = m - r$ nach Dimensionsformel (18.5). Zeigen Sie Lemma 19.5, also dass wir Basen B_V, B_W so wählen können, dass gilt

$$B_W = (\underbrace{w_1, \ldots, w_r}_{\text{Basis von Bild}(f)}, \underbrace{w_{r+1}, \ldots, w_n}_{\text{Ergänzung zu einer Basis von } W})$$

und

$$B_V = (\underbrace{v_1, \ldots, v_r}_{v_j \in f^{-1}(\{w_j\})}, \underbrace{v_{r+1}, \ldots, v_m}_{\text{Basis von Kern}(f)}),$$

und dass die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f)$ von f bzgl. dieser Basen die folgende Gestalt hat:

$$\mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in K^{n \times m}. \tag{0.1}$$

Hausaufgabe I-13.3 (Koordinatendatendarstellung von Vektoren) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

Gegeben seien die folgenden Kombinationen von Vektorräumen V mit Basen B und Vektoren $v \in V$. Bestimmen Sie für jede Kombination die Koordinatendarstellung von v bzgl. B. Woraus bestehen die Spalten der Koeffizientenmatrizen der dazugehörigen linearen Gleichungssysteme?

(a) $V \coloneqq \mathbb{R}^{[\![1,4]\!]}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $B \coloneqq (k e_k)_{k \in [\![1,4]\!]}$, $v \coloneqq \mathrm{id}$

(b) $V \coloneqq \mathbb{Q}^3 \,/\, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $B \coloneqq \left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \right)$, $v \coloneqq \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right]$

Hausaufgabe I-13.4 (Darstellungsmatrizen) 3 + 3 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen aus Hausaufgabe I-12.4Teilaufgabe (a), jeweils bzgl. der Standardbasen der entsprechenden Vektorräume.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der unten stehenden linearen Abbildung

(i) $(\mathbb{Q}^{[\![1,3]\!]}, +, \cdot) \ni f \mapsto f|_{[\![2,3]\!]} \in (\mathbb{Q}^{[\![2,3]\!]}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bzgl. der Basen

$$(1 - e_3,\, 1 - e_2,\, 1 - e_1) \quad \text{und} \quad (1 - e_3,\, 1 - e_2).$$

(ii) $(\mathbb{Q}^{[\![2,3]\!]}, +, \cdot) \ni f \mapsto f(2) + f(3) \in (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bzgl. der Basen

$$(1 - e_3,\, 1 - e_2) \quad \text{und} \quad (2).$$

(iii) Die Komposition der beiden obigen Abbildungen bzgl. der Basen

$$(1 - e_3,\, 1 - e_2,\, 1 - e_1) \quad \text{und} \quad (2).$$

Hinweis: Hier können Sie sich mit einem Resultat aus dem Skript den Großteil der Arbeit sparen.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.