R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 13 (Lösung)

Ausgabedatum: 26. Januar 2026
Abgabedatum: 2. Februar 2026

Übungsaufgabe I-13.1. (Koordinatendatendarstellung von Vektoren)

Gegeben seien die folgenden Kombinationen von Vektorräumen V mit Basen B und Vektoren $v \in V$. Bestimmen Sie für jede Kombination die Koordinatendarstellung von v bzgl. B.

(a) $V \coloneqq \mathbb{R}^4$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $B \coloneqq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $v \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $V \coloneqq (\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \triangle, \odot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, $B \coloneqq (\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2\})$, $v \coloneqq \{2, 3, 4\}$

Lösung.

(a) Bei den Standardvektorräumen liefert ein Koeffizientenvergleich in einer Linearkombination direkt das gesuchte lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix der Form

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

in deren letzter Spalte nun der gesuchte Koordinatenvektor steht.

(b) Wir machen den Ansatz

$$\{2, 3, 4\} = \alpha_1\{1, 3\} \triangle \alpha_2\{1, 2, 3\} \triangle \alpha_3\{1, 4\} \triangle \alpha_4\{1, 2\} \triangle.$$

Im rechten Term ist $\{1\}$ genau dann enthalten, wenn sich alle Koeffizienten zu 0 aufaddieren. Analoge Vergleiche für die jeweiligen Einelementigen Mengen zu 2, 3 und 4 liefern das volle System

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

in deren letzter Spalte nun der gesuchte Koordinatenvektor steht.

Übungsaufgabe I-13.2. (Darstellungsmatrizen)

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen aus Übungsaufgabe I-11.3 Teilaufgabe (a), sofern dies möglich ist, jeweils bzgl. der Standardbasen der entsprechenden Vektorräume.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der unten stehenden linearen Abbildung

(i) $(\mathcal{P}(\llbracket 1, 3 \rrbracket), \triangle, \cdot) \ni M \mapsto M \cap \{1, 3\} \in (\mathcal{P}(\llbracket 1, 4 \rrbracket), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bzgl. der Basen

$$(\{1, 2, 3\},\ \{1, 3\},\ \{1\ \cancel{2}\}) \quad \text{und} \quad (\{1, 2\},\ \{2\},\ \{3, 4\},\ \{4\}).$$

(ii) $(\mathcal{P}(\llbracket 1, 4 \rrbracket), \triangle, \cdot) \ni M \mapsto e_M \in ((\mathbb{Z}_2)^{\llbracket 1,5 \rrbracket}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bzgl. der Basen

$$(\{1, 2\},\ \{2\},\ \{3, 4\},\ \{4\}) \quad \text{und} \quad (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ e_3 + e_4,\ e_4 + e_5),$$

wobei e_M die Elemente aus M auf 1 und jedes andere Argument auf 0 abbildet.

(iii) Die Komposition der beiden obigen Abbildungen bzgl. der Basen

$$(\{1, 2, 3\},\ \{1, 3\},\ \{1\}) \quad \text{und} \quad (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ e_3 + e_4,\ e_4 + e_5).$$

Hinweis: Hier können Sie sich mit einem Resultat aus dem Skript den Großteil der Arbeit sparen.

Lösung.

Die Matrizen ergeben sich immer, indem man spaltenweise die Koeffizientenvektoren der Bilder der Basisvektoren des Urbildraums bzgl. der Bildraumbasis einträgt. Das ist genau der gleiche Prozess, den wir in Übungsaufgabe I-13.1 schon durchgeführt haben. Insbesondere in den unintuitiveren Räumen bietet es sich an, statt in dem Vektorraum selbst in dessen Koordinatenraum bzgl. der Standardbasis zu „denken“. Beispielweise ist in $(\mathcal{P}(\llbracket 1, 3 \rrbracket), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ die Standardbasis $E \coloneqq \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\big\}$ also ist der Vektor $\{1, 2, 3\} = \{1\} \triangle \{2\} \triangle \{3\} = \Phi_E((1, 1, 1)^\intercal)$ und $\{1, 3\} = \{1\} \triangle \{3\} = \Phi_E((1, 0, 1)^\intercal)$.

(a) Zu Übungsaufgabe I-11.3 ist nur die Abbildung aus **??** zu untersuchen, alle anderen Abbildungen sind entweder nicht linear oder involvieren unendlichdimensionale Räume.

Hier ist die Standardbasis E_5 die Basis der Einheitsvektoren und es ergibt sich die Matrix

$$\mathcal{M}_{E_W \leftarrow E_V}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in K^{5\times 5}.$$

(b) (i) Dass es sich hier tatsächlich um eine lineare Abbildung handelt, muss hier nicht gezeigt werden. Die Additivität folgt direkt daraus, dass $(\mathcal{P}(\cdot), \triangle, \cap)$ einen Ring bildet, die Bedingung der Additivität entspricht nämlich genau dem Distributivgesetz.

Die Basisbilder sind gegeben als $(\{1, 3\}, \{1, 3\}, \{1\})$. Zu diesen müssen wir nun die Koeffizienten bzgl. der Bildraumbasis $(\{1, 2\},\ \{2\},\ \{3, 4\},\ \{4\})$ bestimmen.

Wieder können wir einen Ansatz machen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt, oder wir wechseln direkt (durch Anwendung von Φ_E^{-1}) in den Koordinatenraum bzgl. der Standardbasis. Beides endet in dem System mit mehreren rechten Seiten im $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$,

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

was die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{4\times 3}$$

liefert.

(ii) Dass es sich hier tatsächlich um eine lineare Abbildung handelt, muss hier nicht gezeigt werden. Offensichtlich ist das allerdings nicht unbedingt, daher prüfen wir Additivität und Homogenität kurz in einem Schritt mit Fallunterscheidung nach. Dafür seien $A, B \in \mathcal{P}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$. Für $\alpha = 0 \in \mathbb{Z}_2$ ist $e_{A \triangle \alpha B} = e_A = e_A + \alpha e_B$ offensichtlich. Für $\alpha = 1 \in \mathbb{Z}_2$ ist $e_{A \triangle \alpha B} = e_{A \triangle B} = e_A + e_B = e_A + \alpha e_B$ nicht offensichtlich für $x \in A \cap B$ und gilt nur weil $\operatorname{char}(\mathbb{Z}_2) = 2$ gilt.

Die Basisbilder sind gegeben als $(e_{\{1,2\}},\ e_{\{2\}},\ e_{\{3,4\}},\ e_{\{4\}})$. Wieder können wir einen Ansatz machen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt, oder wir wechseln direkt (durch Anwendung von Φ_E^{-1} im Bildraum) in den Koordinatenraum bzgl. der Standardbasis im Bildraum. Beides endet in dem unten stehenden System mit mehreren rechten Seiten im $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

was die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{5\times 4}$$

liefert.

(iii) Die Darstellungsmatrix der Komposition ist das Produkt der Darstellungsmatrizen, sie ist also durch

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{5\times 3}$$

gegeben.

Übungsaufgabe I-13.3. (Links- bzw. Rechtsinvertierbarkeit linearer Abbildungen und ihrer Darstellungsmatrizen)

Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit $\dim(V) = m \in \mathbb{N}_0$ und $\dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Schließlich sei $A \coloneqq \mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f) \in K^{n\times m}$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. dieser Basen. Zeigen Sie Satz 19.14, also die folgenden Aussagen:

(a) Es sind äquivalent:

(i) f ist surjektiv, also $\operatorname{Rang}(f) = n$.

(ii) Es existiert eine Rechtsinverse von f, also eine lineare Abbildung $f_r \colon W \to V$, sodass $f \circ f_r = \mathrm{id}_W$ gilt. f_r ist notwendig injektiv.

(iii) A besitzt vollen Zeilenrang, also $\operatorname{Rang}(A) = n$.

(iv) Es existiert eine Rechtsinverse von A, also eine Matrix $R \in K^{m \times n}$ mit $A\,R = I_n$ gilt. R besitzt notwendig vollen Spaltenrang.

(b) Es sind äquivalent:

(i) f ist injektiv, also $\operatorname{Defekt}(f) = 0$, d. h. $\operatorname{Rang}(f) = m$.

(ii) Es existiert eine Linksinverse von f, also eine lineare Abbildung $f_l \colon V \to W$, sodass $f_l \circ f = \mathrm{id}_V$ gilt. f_l ist notwendig surjektiv. Ihre Einschränkung $f_l|_{f(V)}$ auf das Bild von f ist eindeutig.

(iii) A besitzt vollen Spaltenrang, also $\operatorname{Rang}(A) = m$.

(iv) Es existiert eine Linksinverse von A, also eine Matrix $L \in K^{n \times m}$ mit $L\,A = I_m$ gilt. L besitzt notwendig vollen Zeilenrang.

Lösung.

(a) Nach Satz 19.10 sind Aussage (i) und Aussage (iii) äquivalent. Weiterhin liefert Satz 19.9 direkt die Äquivalenz von Aussage (ii) und Aussage (iv).

Die Implikation Aussage (iv) $\Rightarrow$ Aussage (iii) folgt sofort aus der Rangeigenschaft, dass $n = \operatorname{Rang}(I_n) = \operatorname{Rang}(AR) \le \min(\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(R)) \le n$. Die Implikation Aussage (iii) $\Rightarrow$ Aussage (iv) folgt, da Spalten von A im K^n liegen und dort wegen der Gleichheit von Spalten- und Zeilenrang einen n-dimensionalen Unterraum, also den gesamten K^n aufspannen, damit existieren Koeffizienten, mit denen die Standardvektoren linearkombiniert werden können, diese stehen spaltenweise in der Matrix R.

(b) Wie in der obigen Teilaufgabe ergeben sich die Äquivalenzen von Aussage (i) und Aussage (iii) aus Satz 19.10 und die Äquivalenzen von Aussage (ii) und Aussage (iv) aus Satz 19.9.

Die Implikation Aussage (iv) nach Aussage (iii) folgt wieder aus der analogen Rangabschätzung zu der in der letzten Teilaufgabe und die Rückrichtung folgt aus analogen Argumenten, also dem m-dimensionalen Zeilenraum im K^m.

Hausaufgabe I-13.1 (Koordinatendarstellung in unendlich-dimensionalen Räumen) 4 Punkte

In Satz 19.1 werden Koordinaten(vektoren), Synthese- und Analyseabbildung für endlichdimensionale Vektorräume eingeführt. Entscheiden Sie, ob sich dieses Konzept auf unendlichdimensionale Vektorräume verallgemeinern lässt, und beschreiben Sie, wie die entsprechenden Aussagen und Konzepte angepasst werden müssten.

Lösung.

Das Konzept lässt sich unter Annahme des Auswahlaxioms direkt auf unendlichdimensionale Vektorräume erweitern. Für einen beliebig-dimensionalen Vektorraum V können wir auf Grund des dann gültigen Basisexistenzsatzes die Existenz einer Basisfamilie B_V von Basisvektoren v_i über einer Indexmenge I folgern. Bezüglich dieser Basisfamilie hat jedes $v \in V$ eine Darstellung als endliche Linearkombination mit (bis auf Nullkoeffizienten) eindeutigen Koeffizienten. Das sichert die Existenz, Eindeutigkeit (bezüglich B_V) und Bijektivität der Abbildung

$$\Phi_{B_V} : K_0^I \ni f \mapsto \sum_{i \in I, f(i) \neq 0} f(i)\, v_i \in V,$$

wobei K_0^I die endlich getragenen Funktionen der Indexmenge in den Körper sind. Diese Abbildung ist wieder ein linearer Isomorphismus mit der analog konstruierten Inversen. (4 Punkte)

Hausaufgabe I-13.2 (möglichst einfache Darstellungsmatrizen für lineare Abbildungen) 6 Punkte

Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit $\dim(V) = m \in \mathbb{N}_0$ und $\dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus mit $r = \operatorname{Rang}(f)$ und $\operatorname{Defekt}(f) = \dim(\operatorname{Kern}(f)) = m - r$ nach Dimensionsformel (18.5). Zeigen Sie Lemma 19.5, also dass wir Basen B_V, B_W so wählen können, dass gilt

$$B_W = (\underbrace{w_1, \ldots, w_r}_{\text{Basis von Bild}(f)}, \underbrace{w_{r+1}, \ldots, w_n}_{\text{Ergänzung zu einer Basis von } W})$$

und

$$B_V = (\underbrace{v_1, \ldots, v_r}_{v_j \in f^{-1}(\{w_j\})}, \underbrace{v_{r+1}, \ldots, v_m}_{\text{Basis von Kern}(f)}),$$

und dass die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f)$ von f bzgl. dieser Basen die folgende Gestalt hat:

$$\mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in K^{n \times m}. \tag{0.1}$$

Lösung.

Der Beweis ist im Grunde in der Formatierung der Aussage schon enthalten.

Nach dem Basisexistenz- und -ergänzungssatz können wir eine Basisfamilie $(w_1, \dots, w_r)$ von $\operatorname{Bild}(f)$ wählen und zu einer Basis

$$B_W = (\underbrace{w_1, \dots, w_r}_{\text{Basis von } \operatorname{Bild}(f)}, \underbrace{w_{r+1}, \dots, w_n}_{\text{Ergänzung zu einer Basis von } W})$$

ergänzen. (1.5 Punkte)

Nun wählen wir zu jedem der w_j ein $v_j \in f^{-1}(w_j)$. Die dazugehörige Familie $(v_1, \dots, v_r)$ ist linear unabhängig, da die Familie der w_j linear unabhängig ist. Wir wählen nun eine Basisfamilie $(v_{r+1}, \dots, v_m)$ von $\operatorname{Kern}(f)$ (die Dimension wissen wir aus der Dimensionsformel) und zeigen, dass die Familie

$$B_V = (\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{v_j \in f^{-1}(\{w_j\})}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_m}_{\text{Basis von } \operatorname{Kern}(f)}),$$

eine Basis von V ist. (1.5 Punkte)

Da die Raumdimension bekannt ist, reicht es, hier lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Es sei dafür eine Linearkombination der Null gegeben, also

$$V \ni 0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i.$$

Auswerten von f liefert

$$W \ni 0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j$$

und die lineare Unabhängigkeit der Familie $(w_1, \dots, w_r)$ als Teilfamilie von B_W liefert, dass $\alpha_j = 0$ für $j = 1, \dots, r$. Die Basiseigenschaft der $(v_{r+1}, \dots, v_m)$ für $\operatorname{Kern}(f)$ liefert die restlichen Trivialkoeffizienten. Die Darstellungsmatrix folgt als direkte Konsequenz der Konstruktion. (3 Punkte)

Hausaufgabe I-13.3 (Koordinatendatendarstellung von Vektoren) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

Gegeben seien die folgenden Kombinationen von Vektorräumen V mit Basen B und Vektoren

$v \in V$. Bestimmen Sie für jede Kombination die Koordinatendarstellung von v bzgl. B. Woraus bestehen die Spalten der Koeffizientenmatrizen der dazugehörigen linearen Gleichungssysteme?

(a) $V \coloneqq \mathbb{R}^{[\![1,4]\!]}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $B \coloneqq (ke_k)_{k \in [\![1,4]\!]}$, $v \coloneqq \mathrm{id}$

(b) $V \coloneqq \mathbb{Q}^3 \,/\, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $B \coloneqq \left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \right)$, $v \coloneqq \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right]$

Lösung.

In den Matrizen bestehen die Spalten aus den Koordinatendarstellungen der Vektoren aus B bzgl. der Basis, bzgl. welcher der Koeffizientenvergleich durchgeführt wird, also derjenigen Basis, bezüglich welcher die Elemente der Basis B und die v dargestellt sind. In diesem Fall sind das immer die Standardbasen der jeweiligen Räume.

Formal kann man den Koeffizientenvergleich also auch so interpretieren: Wir nehmen die Elemente aus B sowie v und wenden Φ_E^{-1} mit der Standardbasis E an. Dann stellen wir die Frage, wie wir $\Phi_E^{-1}(v)$ aus $\Phi_E^{-1}(B)$ kombinieren können, was genau dem linearen Gleichungssystem in Matrixproduktschreibweise entspricht.

(a) Wir machen den Ansatz

$$\mathrm{id} = \sum_{k=1}^{4} k e_k = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k e_k$$

wo wieder ein Vergleich der Koeffizienten vor der Basis der charakteristischen Funktionen das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix der Form

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

liefert und damit den Koeffizientenvektor in der letzten Spalte. (1.5 Punkte)

(b) In einem Faktorraum $V \,/\, U$ mit Basis $([v_i])_{i \in I}$ ist

$$[v] = \sum_{i \in I_0} \alpha_i [v_i] = [\sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i]$$

genau dann, wenn $\sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i - v \in U$ ist, also genau dann, wenn v als endliche Linearkombination der Konkatenation von $(v_i)_{i \in I}$ und einer Basisfamilie von U dargestellt werden kann.

Wir lösen also das folgende lineare Gleichungssystem, wo der entsprechende Koeffizientenvektor, mit den beiden zu den Basisklassen gehörenden Koeffizienten in rot, in der rechtesten Spalte zu finden ist:

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 7 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

(1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-13.4 (Darstellungsmatrizen) 3 + 3 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen aus Hausaufgabe I-12.4Teilaufgabe (a), jeweils bzgl. der Standardbasen der entsprechenden Vektorräume.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der unten stehenden linearen Abbildung

(i) $(\mathbb{Q}^{[\![1,3]\!]}, +, \cdot) \ni f \mapsto f|_{[\![2,3]\!]} \in (\mathbb{Q}^{[\![2,3]\!]}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bzgl. der Basen

$$(1 - e_3,\ 1 - e_2,\ 1 - e_1) \quad \text{und} \quad (1 - e_3,\ 1 - e_2).$$

(ii) $(\mathbb{Q}^{[\![2,3]\!]}, +, \cdot) \ni f \mapsto f(2) + f(3) \in (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bzgl. der Basen

$$(1 - e_3,\ 1 - e_2) \quad \text{und} \quad (2).$$

(iii) Die Komposition der beiden obigen Abbildungen bzgl. der Basen

$$(1 - e_3,\ 1 - e_2,\ 1 - e_1) \quad \text{und} \quad (2).$$

Hinweis: Hier können Sie sich mit einem Resultat aus dem Skript den Großteil der Arbeit sparen.

Lösung.

(a) Im Fall von Teilaufgabe (i) ist die Standardbasis die der charakteristischen Funktionen, da die Abbildung die Identität ist, ist das aber auch egal, denn solang auf der Bild- und Urbildseite die gleiche Basis verwandt wird, ergibt sich die Identitätsmatrix $\mathcal{M}_{E_4 \leftarrow E_4}(f) = I_4 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. (1 Punkt)

Im Fall von Teilaufgabe (ii) besteht die Standardbasis aus den Matrizen, die in genau einem Eintrag eine 1 und sonst 0 stehen haben, also die Matrizen

$$(E_{nm})_{n \in [\![1,2]\!],\, m \in [\![1,3]\!]} \subseteq V \quad \text{und} \quad (E_{nm})_{n \in [\![1,3]\!],\, m \in [\![1,3]\!]} \subseteq W.$$

Da diese Familien noch doppelt indiziert sind, müssen wir uns auf eine Ordnung festlegen. Wir machen das spaltenweise, und erhalten die Familien der Form

$$\left(E_{\mathrm{mod}(k-1,n)+1,\lfloor \frac{k+1}{n} \rfloor}\right)_{k\in[\![1,nm]\!]} = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{nm}).$$

Die Darstellungsmatrix ergibt sich entsprechend zu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{R}^{9\times 6}.$$

Hätten wir die doppelt indizierte Basis zeilenweise einfach indiziert, könnten wir die Struktur der Transformationsmatrix in der Darstellungsmatrix nicht so schnell wiedererkennen, denn die Spalten und Zeilen wären permutiert. (2 Punkte)

(b) (i) Dass es sich hier tatsächlich um eine lineare Abbildung handelt, muss hier nicht gezeigt werden.

Die Basisbilder sind gegeben als die Funktionen $(1 - e_3, 1 - e_2, 1)$. Zu diesen müssen wir nun die Koeffizienten bzgl. der Bildraumbasis $(1 - e_3, 1 - e_2)$ bestimmen. Wieder können wir einen Ansatz machen und das dazugehörige lineare Gleichungssystem aufstellen, oder vorher in die Sichtweise der Standardbasis wechseln, die Darstellung ist in diesem Fall aber so leicht abzulesen, dass wir sie hier nur angeben, sie führt gerade auf die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 3}.$$

(1 Punkt)

(ii) Wieder muss nicht gezeigt werden, dass die Abbildung linear ist. Die Bilder der Basiselemente sind gerade $(1, 1)$, damit ergibt sich unter Einbeziehung der Bildraumbasis direkt die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{1\times 2}$$

liefert. (1 Punkt)

(*iii*) Die Darstellungsmatrix der Komposition ist das Produkt der Darstellungsmatrizen, sie ist also durch

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$$

gegeben. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.