R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 12

Ausgabedatum: 19. Januar 2026
Abgabedatum: 26. Januar 2026

Übungsaufgabe I-12.1. (Matrix-Vektor-Multiplikation)

Gegeben sei ein Endomorphismus f auf $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A, so dass $f = f_A$, siehe Lemma 17.12.

Übungsaufgabe I-12.2. (Faktorräume und Homomorphiesatz)

(a) Es sei $U \coloneqq \langle \mathbb{N} \rangle$ mit den entsprechenden Verknüpfungen der Unterraum von $V \coloneqq (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Geben Sie eine Beschreibung der Elemente von $V \,/\, U$ an.

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen i. A. gültig ist, und beweisen Sie Ihre Antwort.

  (i) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V, dann ist $([v_i])_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in $V \,/\, U$.

  (ii) Ist $([v_i])_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in $V \,/\, U$, dann ist $(v_i)_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V.

Übungsaufgabe I-12.3. (Vektorraum der Vektorraumhomomorphismen)

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K und $V_1 \subseteq V$ sowie $W_1 \subseteq W$ mit den entsprechenden Verknüpfungen Unterräume von $(V, +, \cdot)$ bzw. $(W, +, \cdot)$. Entscheiden

Sie, welche der folgenden Mengen Unterräume von $\operatorname{Hom}(V, W)$ sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned} H_= &\coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Kern}(f) = V_1\} & G_= &\coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Bild}(f) = W_1\} \\ H_\subseteq &\coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Kern}(f) \subseteq V_1\} & G_\subseteq &\coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Bild}(f) \subseteq W_1\} \\ H_\supseteq &\coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Kern}(f) \supseteq V_1\} & G_\supseteq &\coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Bild}(f) \supseteq W_1\} \end{aligned}$$

Übungsaufgabe I-12.4. (Basics zu Dimensionssätzen)

Gegeben seien die unten stehenden Paare von Vektorräumen V und Unterräumen U. Bestimmen Sie zu jedem Paar mit Hilfe des Dimensionssatzes für Faktorräume $\operatorname{codim}(U)$ oder erklären Sie, warum anhand dessen keine Aussage möglich ist.

(a) $V \coloneqq (\mathbb{Z}_3)^{3\times 3}$ mit den Matrixverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$, $U \coloneqq \{A \in V \mid \operatorname{Kern}(A) \supseteq \langle e_1, e_3 \rangle\}$

(b) $V \coloneqq (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ mit den Funktionsverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $U \coloneqq \{f \in V \mid f(2\mathbb{N}) = \{0\}\}$

(c) $V \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $\triangle$ und der einzig möglichen S-Multiplikation über $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $U \coloneqq \mathcal{P}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$

Übungsaufgabe I-12.5. (Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K sowie $f \colon V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Folgerung 18.9, also die folgenden Aussagen:

(a) Haben V und W dieselbe endliche Dimension $\dim(V) = \dim(W)$, dann sind äquivalent:

  (i) f ist injektiv.

  (ii) $\operatorname{Defekt}(f) = 0$.

  (iii) f ist surjektiv.

  (iv) $\operatorname{Rang}(f) = \dim(V)$.

  (v) f ist bijektiv.

(b) Ist V endlich-dimensional und gilt $\dim(V) < \dim(W) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht surjektiv sein.

(c) Ist W endlich-dimensional und gilt $\dim(W) < \dim(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein.

(d) Es sei V oder W endlich-dimensional. Ein Isomorphismus $V \to W$ existiert genau dann, wenn der andere Vektorraum auch endlich-dimensional ist und $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Hausaufgabe I-12.1 (Matrix-Vektor-Multiplikation als Vektorraumhomomorphismus) 1 + 1 + 0.5 + 1.5 = 4 Punkte

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 17.12, also die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in K^{n \times m}$, dann definiert die **von A induzierte lineare Abbildung**

$$f_A \colon K^m \ni x \mapsto f_A(x) \coloneqq A\,x \in K^n$$

tatsächlich eine lineare Abbildung $K^m \to K^n$.

(b) Ist $f \colon K^m \to K^n$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Matrix $A \in K^{n \times m}$, sodass $f = f_A$ gilt.

(c) Sind $A \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{m \times k}$, dann gilt

$$f_A \circ f_B = f_{A\,B}.$$

(d) $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $f_A \colon K^n \to K^n$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Hausaufgabe I-12.2 (Faktorräume und Homomorphiesatz) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Es sei $U \coloneqq \langle \mathbb{N} \rangle$ mit den entsprechenden Verknüpfungen der Unterraum von $V \coloneqq (\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Geben Sie eine Beschreibung der Elemente von $V \,/\, U$ an.

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen i. A. gültig ist, und beweisen Sie Ihre Antwort.

  (i) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine erzeugende Familie von Vektoren in V, dann ist $([v_i])_{i \in I}$ eine erzeugende Familie von Vektoren in $V \,/\, U$.

  (ii) Ist $([v_i])_{i \in I}$ eine erzeugende Familie von Vektoren in $V \,/\, U$, dann ist $(v_i)_{i \in I}$ eine erzeugende Familie von Vektoren in V.

Hausaufgabe I-12.3 (Vektorraum der Vektorraumhomomorphismen) 5 Punkte

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Unterräume von $\operatorname{Hom}(V, W)$ sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

$$H_< \coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim(\operatorname{Kern}(f)) < \infty\} \quad G_< \coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim(\operatorname{Bild}(f)) < \infty\}$$
$$H_= \coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim(\operatorname{Kern}(f)) = \infty\} \quad G_= \coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \infty\}$$

Hausaufgabe I-12.4 (Basics zu Dimensionssätzen) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Gegeben seien die unten stehenden Vektorraumhomomorphismen $f\colon V \longrightarrow W$ zwischen Vektorräumen über demselben Körper. Bestimmen Sie in jeder Teilaufgabe den Rang und den Defekt von f. Wenden Sie in jeder Teilaufgabe einmal den Dimensionssatz für Vektorraumhomomorphismen an.

(i) $V \coloneqq \mathbb{R}^{[\![0,3]\!]}$, $W \coloneqq \mathbb{R}^{[\![0,3]\!]}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f \coloneqq \mathrm{id}$

(ii) $V \coloneqq \mathbb{R}^{2\times 3}$, $W \coloneqq \mathbb{R}^{3\times 3}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f(A) \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A$

(b) (i) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ drei Vektorräume über K sowie $f\colon U \longrightarrow V$, $g\colon V \longrightarrow W$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$\dim(\mathrm{Bild}(g \circ f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$$

gilt.

(ii) Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie Teilaufgabe (i) um $\dim(\mathrm{Bild}(f \circ f))$ zu bestimmen.

Hausaufgabe I-12.5 (Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume) 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2 Punkte

Gegeben seien die unten stehenden Paare von Vektorräumen V und W über demselben Körper. Welche Aussagen können Sie bezüglich der Injektivität und Surjektivität einer linearen Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ anhand des obigen Satzes machen?

(a) $V \coloneqq K^3$, $W \coloneqq K_4$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$

(b) $V \coloneqq K_4$, $W \coloneqq K^3$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$

(c) $V \coloneqq (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$, $W \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

(d) $V \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$, $W \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}})$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.