R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 12 (Lösung)

Ausgabedatum: 19. Januar 2026
Abgabedatum: 26. Januar 2026

Übungsaufgabe I-12.1. (Matrix-Vektor-Multiplikation)

Gegeben sei ein Endomorphismus f auf $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A, so dass $f = f_A$, siehe Lemma 17.12.

Lösung.

Aus der spaltenweisen Sicht auf die Matrixmultiplikation kann man ablesen, dass in den Spalten der Matrix gerade die Bilder der Standardbasisvektoren unter f stehen. Wir kennen die Bilder der Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

müssen also die Bilder der Standardvektoren aus Linearkombinationen der Bilder der obigen Vektoren zusammensetzen, und zwar mit den Koeffizienten, die benötigt werden, um aus den obigen Vektoren die Standardvektoren zu kombinieren, da f linear ist. Hier kann man ein lineares Gleichungssystem lösen oder auf Grund der einfachen Struktur die Lösung direkt ablesen. Das Bild des ersten Standardvektors ist ohnehin bereits gegeben, für die anderen gilt

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

und

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Übungsaufgabe I-12.2. (Faktorräume und Homomorphiesatz)

(a) Es sei $U \coloneqq \langle \mathbb{N} \rangle$ mit den entsprechenden Verknüpfungen der Unterraum von $V \coloneqq (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Geben Sie eine Beschreibung der Elemente von V / U an.

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen i. A. gültig ist, und beweisen Sie Ihre Antwort.

  (i) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V, dann ist $([v_i])_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V / U.

  (ii) Ist $([v_i])_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V / U, dann ist $(v_i)_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V.

Lösung.

(a) Die Menge $\langle \mathbb{N} \rangle$ ist der von dem Element $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ erzeugte Unterraum von $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, er besteht also genau aus den Elementen

$$\{\emptyset, \mathbb{N}\}\,.$$

Ein Element $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ liefert also die Klasse

$$[M] = \{M \triangle \emptyset, M \triangle \mathbb{N}\} = \{M, \mathbb{N} \setminus M\}$$

und damit die gleiche, wie sein Komplement in $\mathbb{N}$. Es gilt also

$$V / \langle \mathbb{N} \rangle = \{\{M, \mathbb{N} \setminus M\} \mid M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}\,.$$

(b) (i) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch, denn sobald $v_i \in U$ für ein $i \in I$, dann beinhaltet die Familie $[v_i]_{i \in I}$ den Nullvektor und ist damit linear abhängig.

  (ii) Diese Aussage ist korrekt, wie man schnell über Kontraposition zeigen kann, denn ist $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig, dann ist $[v_i]_{i \in I}$ die dazugehörige Bildfamilie unter der linearen Abbildung der kanonischen Surjektion, und damit nach Lemma 17.6 ebenfalls linear abhängig.

Übungsaufgabe I-12.3. (Vektorraum der Vektorraumhomomorphismen)

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K und $V_1 \subseteq V$ sowie $W_1 \subseteq W$ mit den entsprechenden Verknüpfungen Unterräume von $(V, +, \cdot)$ bzw. $(W, +, \cdot)$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Unterräume von $\operatorname{Hom}(V, W)$ sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned}
H_= &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Kern}(f) = V_1\} & G_= &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Bild}(f) = W_1\}\\
H_\subseteq &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Kern}(f) \subseteq V_1\} & G_\subseteq &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Bild}(f) \subseteq W_1\}\\
H_\supseteq &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Kern}(f) \supseteq V_1\} & G_\supseteq &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{Bild}(f) \supseteq W_1\}
\end{aligned}$$

Lösung.

Die Nullfunktion hat vollen Kern, sie liegt also genau dann in $H_=$ und $H_\subseteq$, wenn $V_1 = V$ ist. Ansonsten handelt es sich bei diesen beiden Mengen nicht um Unterräume. Ist $V_1 = V$, dann ist $H_=$ der triviale Unterraum $\{0\}$ und $H_\subseteq$ der triviale Unterraum $\operatorname{Hom}(V, W)$.

Analog hat die Nullfunktion triviales Bild, sie liegt also genau dann in $G_=$ und $G_\supseteq$, wenn W_1 der triviale Nullunterraum ist. Ansonsten handelt es sich bei diesen beiden Mengen nicht um Unterräume. Ist $W_1 = \{0\}$, dann ist $G_=$ der triviale Unterraum $\{0\}$ und $G_\supseteq$ der triviale Unterraum $\operatorname{Hom}(V, W)$.

Die Menge $H_\supseteq$ enthält immer die Nullfunktion, ist also nie leer. Außerdem ist sie abgeschlossen unter den Vektorraumverknüpfungen. Seien dafür $f, g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\alpha, \beta \in K$. Dann ist

$$(\alpha f + \beta g)(v) = \alpha f(v) + \beta g(v) = 0 \quad \forall v \in V_1.$$

Es handelt sich also um einen Unterraum.

Die Menge $G_\subseteq$ enthält immer die Nullfunktion, ist also nie leer. Außerdem ist sie abgeschlossen unter den Vektorraumverknüpfungen. Seien dafür $f, g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\alpha, \beta \in K$. Dann ist

$$(\alpha f + \beta g)(v) = \alpha \underbrace{f(v)}_{\in W_1} + \beta \underbrace{g(v)}_{\in W_1} \in W_1 \quad \forall v \in V.$$

Es handelt sich also um einen Unterraum.

Übungsaufgabe I-12.4. (Basics zu Dimensionssätzen)

Gegeben seien die unten stehenden Paare von Vektorräumen V und Unterräumen U. Bestimmen Sie zu jedem Paar mit Hilfe des Dimensionssatzes für Faktorräume $\operatorname{codim}(U)$ oder erklären Sie, warum anhand dessen keine Aussage möglich ist.

(a) $V \coloneqq (\mathbb{Z}_3)^{3\times 3}$ mit den Matrixverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$, $U \coloneqq \{A \in V \mid \operatorname{Kern}(A) \supseteq \langle e_1, e_3\rangle\}$

(b) $V \coloneqq (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ mit den Funktionsverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $U \coloneqq \{f \in V \mid f(2\mathbb{N}) = \{0\}\}$

(c) $V \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $\triangle$ und der einzig möglichen S-Multiplikation über $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $U \coloneqq \mathcal{P}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$

Lösung.

(a) Matrizen aus U haben als erste und dritte Spalte eine Nullspalte. Die mittlere Spalte ist frei wählbar, es ist also

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

ein dreidimensionaler Unterraum des $3 \cdot 3 = 9$ dimensionalen $(\mathbb{Z}_3)^{3\times 3}$. Entsprechend ist $\operatorname{codim}(U) = \dim_{V\,/\,U} = \dim_V - \dim_U = 9 - 3 = 6$.

(b) Wir wissen bereits, dass $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ ein unendlichdimensionaler Vektorraum ist, denn die charakteristischen Funktionen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind eine unendliche, linear unabhängige Menge. Ebenfalls ist die Dimension von U unendlich, denn die charakteristischen Funktionen $(e_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sind (als Teilfamilie der obigen) linear unabhängig aber immernoch abzählbar unendlich. Wir können den Dimensionsatz hier also zu keiner Aussage über $\operatorname{codim} U$ verwenden, denn wir sind in dem Fall, in dem er $\infty - \infty$ ergeben würde.

(c) Wegen der Unendlichkeit von $\mathbb{R}$ ist auch $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ unendlichdimensional, denn die einelementigen Mengen $\{x\}_{x\in\mathbb{R}}$ bilden eine linear unabhängige Menge, wie wir bereits gesehen haben. Nun ist aber $\mathcal{P}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$ ein endlicher Teilraum und damit auch endlichdimensional, denn er ist für sich selbst erzeugend. Damit muss die Kodimension unendlich sein.

Übungsaufgabe I-12.5. (Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K sowie $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Folgerung 18.9, also die folgenden Aussagen:

(a) Haben V und W dieselbe endliche Dimension $\dim(V) = \dim(W)$, dann sind äquivalent:

(i) f ist injektiv.

(ii) $\operatorname{Defekt}(f) = 0$.

(iii) f ist surjektiv.

(iv) $\operatorname{Rang}(f) = \dim(V)$.

(v) f ist bijektiv.

(b) Ist V endlich-dimensional und gilt $\dim(V) < \dim(W) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht surjektiv sein.

(c) Ist W endlich-dimensional und gilt $\dim(W) < \dim(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein.

(d) Es sei V oder W endlich-dimensional. Ein Isomorphismus $V \to W$ existiert genau dann, wenn der andere Vektorraum auch endlich-dimensional ist und $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Lösung.

(a) Aussage (i) $\Leftrightarrow$ Aussage (ii):

$$\begin{aligned} & f \text{ ist injektiv} & \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{Kern}(f) = \{0\} & \text{wegen Lemma 17.8} \\ \Leftrightarrow \quad & \dim(\operatorname{Kern}(f)) = 0 & \text{genau der Nullraum hat Dimension 0 (Beispiel 13.16).} \end{aligned}$$

Aussage (ii) $\Leftrightarrow$ Aussage (iv):

$$\begin{aligned} & \dim(\operatorname{Kern}(f)) = 0 & \\ \Leftrightarrow \quad & \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V) & \text{Dimensionsformel (18.5): } \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Kern}(f)). \end{aligned}$$

Aussage (iii) $\Leftrightarrow$ Aussage (iv):

$$\begin{aligned} & \operatorname{Bild}(f) = W & \\ \Leftrightarrow \quad & \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(W) & \text{nach Folgerung 13.17} \\ \Leftrightarrow \quad & \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V) & \text{nach Voraussetzung } \dim(V) = \dim(W). \end{aligned}$$

Da sich Bijektivität aus Surjektivität und Injektivität zusammensetzt, gilt auch Aussage (i) $\Leftrightarrow$ Aussage (iii) $\Leftrightarrow$ Aussage (v).

(b) Nach Dimensionsformel (18.5) gilt

$$\dim(\operatorname{Kern}(f)) + \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V).$$

Wegen $\dim(\operatorname{Bild}(f)) \leqslant \dim(V) < \dim(W)$ ist $\operatorname{Bild}(f)$ ein echter Unterraum von W, also f nicht surjektiv.

(c) Nach Dimensionsformel (18.5) gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V).$$

Wegen $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leqslant \dim(W) < \dim(V)$ kann $\mathrm{Kern}(f)$ nicht der Nullraum sein, also ist f nicht injektiv.

(d) Haben V und W die gleiche, endliche Dimension, dann existieren Familien $(v_n)_{n \in [\![0, \dim V]\!]}$ und $(w_n)_{n \in [\![0, \dim V]\!]}$ von Basisvektoren (zu der gleichen Indexmenge). Satz 17.10 impliziert dann die Existenz eines Isomorphismus.

Existiert ein Isomorphismus von V nach W, dann ist für jede Familie von Basisvektoren $(v_n)_{n \in [\![0, \dim V]\!]}$ aus V deren Bildfamilie $f(v_n)_{n \in [\![0, \dim V]\!]}$ linear unabhaengig und erzeugend, also eine Basis (Lemma 17.6).

Hausaufgabe I-12.1 (Matrix-Vektor-Multiplikation als Vektorraumhomomorphismus) 1 + 1 + 0.5 + 1.5 = 4 Punkte

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 17.12, also die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in K^{n\times m}$, dann definiert die **von A induzierte lineare Abbildung**

$$f_A \colon K^m \ni x \mapsto f_A(x) \coloneqq A\,x \in K^n$$

tatsächlich eine lineare Abbildung $K^m \to K^n$.

(b) Ist $f \colon K^m \to K^n$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Matrix $A \in K^{n\times m}$, sodass $f = f_A$ gilt.

(c) Sind $A \in K^{n\times m}$ und $B \in K^{m\times k}$, dann gilt

$$f_A \circ f_B = f_{A\,B}.$$

(d) $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $f_A \colon K^n \to K^n$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Lösung.

(a) Wir müssen Linearität nachprüfen, diese folgt direkt aus dem Matrixmultiplikationseigenschaften. Dafür seien $x, y \in K^m$ und $\alpha \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_A(x+y) &= A\,(x+y) = A\,x + A\,y = f_A(x) + f_A(y) \\ f_A(\alpha\,x) &= A(\alpha\,x) = \alpha(A\,x). \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b) Die Matrix lässt sich leicht konkret angeben, denn für $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i$ ist

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^m v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m \underbrace{v_i}_{\in K}\, \underbrace{f(e_i)}_{\in K^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \cdots & f(e_m) \\ | & & | \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Hier sieht man auch die Eindeutigkeit dieser Matrix. (1 Punkt)

(c) Diese Eigenschaft folgt sofort aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation, denn für $v \in K^m$ ist

$$f_A \circ f_B(v) = f_A(f_B(v)) = A\,(B\,v) = (A\,B)\,v = f_{AB}(v).$$

(0.5 Punkte)

(d) Ist $A \in K^{n \times n}$ invertierbar, dann ist

$$f_A \circ f_{A^{-1}} = A\,A^{-1}(\cdot) = I_n(\cdot) = \mathrm{id} = A^{-1}\,A(\cdot) = f_{A^{-1}} \circ f_A.$$

Ist f_A invertierbar, dann gibt es $(f_A)^{-1}$ und eine Matrix B, so dass $f_B = (f_A)^{-1}$. Entsprechend ist

$$f_{I_n} = \mathrm{id} = (f_A)^{-1} \circ f_A = f_B \circ f_A = f_{BA} = f_{AB}$$

und die Eindeutigkeit der darstellenden Matrix liefert $B = A^{-1}$. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-12.2 (Faktorräume und Homomorphiesatz) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Es sei $U := \langle \mathbb{N} \rangle$ mit den entsprechenden Verknüpfungen der Unterraum von $V := (\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Geben Sie eine Beschreibung der Elemente von $V\,/\,U$ an.

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen i. A. gültig ist, und beweisen Sie Ihre Antwort.

   (i) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine erzeugende Familie von Vektoren in V, dann ist $([v_i])_{i \in I}$ eine erzeugende Familie von Vektoren in $V\,/\,U$.

   (ii) Ist $([v_i])_{i \in I}$ eine erzeugende Familie von Vektoren in $V\,/\,U$, dann ist $(v_i)_{i \in I}$ eine erzeugende Familie von Vektoren in V.

Lösung.

(a) In $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ ist $\langle \mathbb{N} \rangle = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ und damit ist für jedes $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$

$$[A] = \{A \triangle \emptyset, A \triangle \mathbb{N}\} = \{A, A \triangle \mathbb{N}\},$$

was sich in $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ nicht weiter eingrenzen lässt, da alle Teilmengenkonstellationen zwischen A und $\mathbb{N}$ auftreten können. (1 Punkt)

(b) (i) Die Aussage ist wahr, denn es ist

$$\langle ([v_i])_{i \in I} \rangle = \{[v] \mid v \in \langle (v_i)_{i \in I} \rangle\} = \{[v] \mid v \in V\} = V\,/\,U.$$

(1.5 Punkte)

(ii) Die Aussage ist i. A. falsch, denn sofern W ein zu U komplementärer nichttrivialer Unterraum ist, dann ist wegen der Surjektivität der Gruppentranslationen in $(V, +)$ für $v = u + w$ mit den Anteilen $u \in U$ und $w \in W$ gerade

$$[v] = [u + w] = u + w + U = w + U = [w]$$

und damit insbesondere für eine Basismenge B_W von W auch $\{[w]\}w \in B_W$ erzeugend in V / U aber für nichttrivialen Unterraum U ist B_W natürlich nicht erzeugend in V. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-12.3 (Vektorraum der Vektorraumhomomorphismen) 5 Punkte

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Unterräume von $\operatorname{Hom}(V, W)$ sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

$$H_< \coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim(\operatorname{Kern}(f)) < \infty\} \quad G_< \coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim(\operatorname{Bild}(f)) < \infty\}$$
$$H_= \coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim(\operatorname{Kern}(f)) = \infty\} \quad G_= \coloneqq \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \infty\}$$

Lösung.

In der Menge $H_<$ liegt die Nullfunktion aus $\operatorname{Hom}(V, W)$ genau dann, wenn $V = \operatorname{Kern}(0)$ endlichdimensional ist, für unendlichdimensionales V handelt es sich also nie um einen Unterraum. Ist V endlichdimensional, dann ist $\operatorname{Kern}(f)$ für jedes f aus $\operatorname{Hom}(V, W)$ ein Teilraum von V und damit ebenfalls endlichdimensional, dann handelt es sich bei $H_<$ also um $\operatorname{Hom}(V, W)$ und ist damit ein (trivialer) Unterraum. (1.5 Punkte)

In der Menge $H_=$ liegt die Nullfunktion aus $\operatorname{Hom}(V, W)$ genau dann, wenn $V = \operatorname{Kern}(0)$ unendlichdimensional ist, für endlichdimensionales V handelt es sich also nie um einen Unterraum.

Ist W endlichdimensional, dann ist auf Grund des Dimensionssatzes $\operatorname{Kern}(f)$ unendlichdimensional und damit $H_= = \operatorname{Hom}(V, W)$ und damit ein (trivialer) Unterraum.

Ist W unendlichdimensional, dann kommt es auf die Mächtigkeit der Basen von V und W an. Wir wissen, dass die Basen eines Vektorraums gleichmächtig sind (Bemerkung 13.15,Satz 18.2).

Sind die Basen von V nicht höchstens gleichmächtig zu den Basen von W (existiert also keine injektive Abbildung zwischen Basen B_V von V und B_W von W), dann handelt es sich bei $H_=$ wieder um $\operatorname{Hom}(V, W)$ und damit um einen trivialen Unterraum, denn angenommen es gäbe ein $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit endlichdimensionalem Kern, dann wäre nach dem Homomorphiesatz $V / \operatorname{Kern}(f) \cong \operatorname{Bild}(f) \subseteq W$ aber $V / \operatorname{Kern}(f)$ ist auch isomorph zu V, denn wir können eine (endliche) Basis B_K von $\operatorname{Kern}(f)$ zu einer (unendlichen) Basis B_V von V erweitern. Dann ist B_V zu $B_V \setminus B_K$ gleichmächtig, was gleichmächtig zu $V / \operatorname{Kern}(f)$ ist, da es sich bei B_V und $B_V \setminus B_K$ um Basen komplementärer Unterräume von V handelt. Für die Gleichmächtigkeit von B_V und $B_V \setminus B_K$ wählt man eine abzählbar unendliche Teilmenge von $B_V \setminus B_K$ und definiert eine Bijektion zwischen B_V und $B_V \setminus K$ indem man die endlich vielen Elemente von B_V in der Abzählung vor die Elemente der abzählbaren Teilmenge stellt und auf dem Rest die Identität definiert. Nun ist also $V \cong V / \operatorname{Kern}(f) \cong \operatorname{Bild}(f)$ und damit jede Basis von V höchstens gleichmächtig zu denen von W (denn wir können eine Basis von W durch Ergänzung der zu B_V gleichmächtigen Basis von $\operatorname{Bild}(f)$ erhalten).

Sind die Basen von V höchstens gleichmächtig zu W, dann handelt es sich bei $H_=$ nicht um einen Unterraum, denn dann existieren zwei unendlichdimensionale Teilräume V_1 und V_2 und Homomorphismen f_1, f_2 mit $\operatorname{Kern}(f_1) = V_1$ und $\operatorname{Kern}(f_2) = V_2$, also $f_1, f_2 \in H_=$, aber $\operatorname{Kern}(f_1 + f_2) = \operatorname{Kern}(f_1) \cap \operatorname{Kern}(f_2) = \{0\}$, also $f_1 + f_2 \in H_=$, womit $H_=$ nicht additiv abgeschlossen ist. Um f_1 und f_2 zu konstruieren wählen wir eine Basis B_V von V und B_W von W und die nach Annahme existierende Injektion $f \colon B_V \to B_W$ sowie eine abzählbar unendliche Teilmenge B_{V_1} von B_V mit unendlichem Komplement $B_{V_2} \coloneqq B_V \setminus B_{V_1}$, setzen $V_1 \coloneqq \langle B_{V_1} \rangle$ und $V_2 \coloneqq \langle B_{V_2} \rangle$ und definieren f_1 als lineare Fortsetzung von f auf B_{V_1} (also über die Bilder $f(B_{V_1}) \subseteq B_W$) und analog für f_2. Diesen Beweis hatte ich ursprünglich selbst falsch aufgeschrieben. Der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe entspricht nicht dem, was ich im Sinne hatte. Hier sieht man im Grunde, wie sich der Dimensionssatz auf unendlichdimensionale Räume erweitern ließe.[GM]

(2 Punkte)

Die Menge $G_<$ beinhaltet die Nullfunktion, ist also nicht leer und für alle $\alpha \in K$ und $f, g \in G_<$ gilt

$$\operatorname{Bild}(f + \alpha g) \subseteq \operatorname{Bild}(f) + \alpha \operatorname{Bild}(g) \subseteq \operatorname{Bild}(f) + \operatorname{Bild}(g)$$

was ebenfalls endlichdimensional ist, hier handelt es sich also immer um einen Unterraum. (1 Punkt)

Die Menge $G_=$ beinhaltet nie die Nullfunktion, ist also kein Unterraum. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe I-12.4 (Basics zu Dimensionssätzen) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Gegeben seien die unten stehenden Vektorraumhomomorphismen $f \colon V \to W$ zwischen Vektorräumen über demselben Körper. Bestimmen Sie in jeder Teilaufgabe den Rang und den Defekt von f. Wenden Sie in jeder Teilaufgabe einmal den Dimensionssatz für Vektorraumhomomorphismen an.

   (*i*) $V \coloneqq \mathbb{R}^{[\![0,3]\!]}$, $W \coloneqq \mathbb{R}^{[\![0,3]\!]}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f \coloneqq \operatorname{id}$

(ii) $V \coloneqq \mathbb{R}^{2\times 3}$, $W \coloneqq \mathbb{R}^{3\times 3}$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $f(A) \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A$

(b) (i) Es seien $(K,+,\cdot)$ ein Körper und $(U,+,\cdot)$, $(V,+,\cdot)$, $(W,+,\cdot)$ drei Vektorräume über K sowie $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$\dim(\mathrm{Bild}(g \circ f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$$

gilt.

(ii) Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie Teilaufgabe (i) um $\dim(\mathrm{Bild}(f \circ f))$ zu bestimmen.

Lösung.

(a) (i) Da $f = \mathrm{id}$ ist, ist natürlich $\mathrm{Bild}(f) = W$ und damit $\mathrm{Rang}(f) = \dim(V) = 4$ also $\mathrm{Defekt}(f) = \dim(V) - \mathrm{Rang}(f) = 4 - 4 = 0$. (0.5 Punkte)

(ii) Die ersten beiden Zeilen von $f(A)$ bestehen aus den vertauschten ersten beiden Zeilen von A, also ist $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$ und damit $\mathrm{Defekt}(f) = 0$, also $\mathrm{Rang}(f) = \dim(V) - \mathrm{Defekt}(f) = 6 - 0 = 6$. (0.5 Punkte)

(b) (i) Wir wissen, dass $\mathrm{Bild}(f)$ ein Unterraum von V ist. Schränken wir g auf diesen Raum ein, so bleibt $g|_{\mathrm{Bild}(f)}$ ein Homomorphismus von $\mathrm{Bild}(f)$ nach W. Wenden wir auf diesen Homomorphismus den Dimendionssatz an, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Bild}(f)) &= \dim(\mathrm{Kern}(g|_{\mathrm{Bild}(f)})) + \dim(\mathrm{Bild}(g|_{\mathrm{Bild}(f)})) \\ &= \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)) + \dim(\mathrm{Bild}(g \circ f)). \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(ii) Den Kern von f erhält man aus der Bedingung

$$0 = f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also als die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und der dazugehörigen reduzierten Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

also als $\operatorname{Kern}(f) = \langle(-2, 1, 1)^\intercal\rangle$. (1 Punkt)

Damit ist klar, dass die Bilder der Einheitsvektoren linear abhängig sind. Aus dem Dimensionssatz erhält man, dass $\operatorname{Bild}(f)$ zweidimensional ist und $f(e_2)$ und $f(e_3)$ sind linear unabhängig, sind also eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$. Da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} f(e_2) - f(e_3)$$

ist, ist $\operatorname{Kern}(f) \subseteq \operatorname{Bild}(f)$ und damit $\operatorname{Bild}(f) \cap \operatorname{Kern}(f)$ eindimensional. (1 Punkt)

Aus der vorherigen Teilaufgabe folgt nun $\dim(\operatorname{Bild}(f \circ f)) = 1$.

Hausaufgabe I-12.5 (Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume) 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2 Punkte

Gegeben seien die unten stehenden Paare von Vektorräumen V und W über demselben Körper. Welche Aussagen können Sie bezüglich der Injektivität und Surjektivität einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ anhand des obigen Satzes machen?

(a) $V \coloneqq K^3$, $W \coloneqq K_4$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$
(b) $V \coloneqq K_4$, $W \coloneqq K^3$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$
(c) $V \coloneqq (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$, $W \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$
(d) $V \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$, $W \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}})$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

Lösung.

(a) Die Dimension des Bilds ist höchstens so groß, wie die des Urbildraums, also 3, und damit echt kleiner als die Dimension des Bildraums (4), daher kann die Funktion nicht surjektiv sein. Injektivität ist möglich. (0.5 Punkte)

(b) Die Dimension des Bilds ist höchstens so groß, wie die des Bildraums, also 3, und damit echt kleiner als die Dimension des Urbildraums (4), daher kann die Funktion nicht injektiv sein, denn der Kern hat mindestens Dimension 1. Surjektivität ist möglich. (0.5 Punkte)

(c) Der Urbildraum hat unendliche Dimension, der Bildraum aber nur Dimension 2, es also keine injektiven linearen Abbildungen existieren, jede lineare Abbildungen hat einen unendlichdimensionalen Kern. Surjektivität ist möglich. (0.5 Punkte)

(d) Der Urbildraum sowie der Bildraum haben unendliche Dimension, hier sind keine Informationen allein aus dem Dimensionssatz in der von uns gegeben Form zu ziehen. (0.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.