R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 11

Ausgabedatum: 12. Januar 2026
Abgabedatum: 19. Januar 2026

Übungsaufgabe I-11.1. (Beispiele linearer Gleichungssysteme)

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

über $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ in Abhängigkeit von z.

(b) Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^{\{1,2,3,4\}}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Basen

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{e_1 + e_3 + e_4,\ e_2 + 2e_3 + e_4,\ e_1 + e_4,\ 2e_2 + e_3 + e_4\} \\ B_2 &:= \{2e_1 + e_3,\ 3e_2 + 2e_4,\ e_1 + 2e_2 + 3e_3 + e_4,\ e_1 + e_2 + e_3 + 5e_4\} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Linearkombinationskoeffizienten der Elemente in B_2 bezüglich B_1, indem Sie das dazugehörige lineare Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten aufstellen und lösen.

Übungsaufgabe I-11.2. (Resultate zu Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme)

Es sei K ein Körper und $\tilde{K}$ ein echter Teilkörper von K sowie $n, m, k \in \mathbb{N}$ und $A \in \tilde{K}^{n \times m}$ und $b \in \tilde{K}^n$.

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ bezüglich K genau dann mit der bezüglich $\tilde{K}$ übereinstimmt, wenn das System eindeutig oder garnicht lösbar ist.

Übungsaufgabe I-11.3. (Basics zu Vektorraumhomomorphismen)

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen Vektorraumhomomorphismen, -endomorphismen oder -automorphismen sind, und beweisen Sie Ihre Antwort.

   (i) $f\colon K_5 \ni (v_1, \ldots, v_5) \mapsto (v_5, \ldots, v_1) \in K_5$ jeweils über einem Körper K.

   (ii) $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \max(x, 0) \in \mathbb{R}$ jeweils über $\mathbb{R}$.

   (iii) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto \mathbb{Q} \setminus M \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Es seien $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K. Zeigen Sie Satz 17.3(i), also dass wenn $f\colon V \to W$ und $g\colon U \to V$ lineare Abbildungen sind, dann ist auch $f \circ g\colon U \to W$ eine lineare Abbildung.

Übungsaufgabe I-11.4. (Konstruktion linearer Abbildungen)

Wir betrachten die Vektorräume $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ über dem Körper $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(e_n) = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist eine solche Abbildung eindeutig, surjektiv, injektiv oder bijektiv?

Hausaufgabe I-11.1 (Beispiele linearer Gleichungssysteme) 2 + 4 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ in Abhängigkeit von r, s;

(b) Gegeben sei $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ und eine einelementige Menge Y sowie die Basen

$$\begin{aligned} B_1 &\coloneqq (\{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_2\}) \\ B_2 &\coloneqq (X \setminus \{x_i\})_{i \in [\![1,4]\!]} \end{aligned}$$

zu dem Vektorraum $(\mathcal{P}(X), \triangle, \odot)$ über $(\mathcal{P}(Y), \triangle, \cap)$.

Bestimmen Sie die Linearkombinationskoeffizienten der Mitglieder in B_2 bezüglich B_1 und die der Mitglieder in B_1 bezüglich B_2, indem Sie die dazugehörigen linearen Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten aufstellen und lösen.

Hausaufgabe I-11.2 (Resultate zu Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme) 1 + 2 + 2 = 5 Punkte

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{n \times m}$ und $b \in K^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(A, b)$ genau dann ein Unterraum von K^m ist, wenn $b = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $M \in K^{k \times n}$ gilt:

$$\mathcal{L}(MA, Mb) = \mathcal{L}(A, b + \mathcal{L}(M, 0)) \coloneqq \bigcup_{c \in \mathcal{L}(M,0)} \mathcal{L}(A, b + c).$$

(c) Zeigen Sie, dass für alle $M \in K^{m \times k}$ gilt:

$$\mathcal{L}(AM, b) = \mathcal{L}(M, \mathcal{L}(A, b)) \coloneqq \bigcup_{c \in \mathcal{L}(A,b)} \mathcal{L}(M, c).$$

Hausaufgabe I-11.3 (Basics zu Vektorraumhomomorphismen) 1.5 + 1 + 1.5 + 3 = 7 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen Vektorraumhomomorphismen, -endomorphismen oder -automorphismen sind, und beweisen Sie Ihre Antwort.

(i) $f\colon \mathbb{R}_5 \ni (v_1, \dots, v_5) \mapsto (3\,v_1, 2\,v_4 + v_1, 0, 0, v_5 + 1) \in \mathbb{R}_5$ jeweils über $\mathbb{R}$.

(ii) $f\colon \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \ni f \mapsto f^2 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ jeweils mit den punktweisen Funktionsverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, wobei $f^2 = f \cdot_2 f$ punktweise zu verstehen ist.

(iii) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto M \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K und $f\colon V \to W$ bijektiv. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Vektorraumisomorphismus von V nach W ist, wenn f^{-1} ein Vektorraumisomorphismus von W nach V ist.

(c) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Vektorraumendomorphismus mit $v \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$f^{(n)}(v) \coloneqq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}}(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(v) \coloneqq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n+1\text{-mal}}(v) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\left\{v, f(v), \dots, f^{(n)}(v)\right\}$ linear unabhängig ist.

(d) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K der Charakterstik $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie:

(i) Ist $f\colon V \to V$ ein selbstinverser Vektorraumautomorphismus, dann sind

$$V_+(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = v\} \qquad \text{und} \qquad V_-(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = -v\}$$

V-komplementäre Unterräume.

(ii) Sind U und W zwei V-komplementäre Unterräume, dann gibt es genau einen selbstinversen Vektorraumautomorphismus mit $V_+(f) = U$ und $V_-(f) = W$.

Hausaufgabe I-11.4 (Konstruktion linearer Abbildungen) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Gegeben sei $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Entscheiden Sie, ob es eine lineare Abbildung f von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \odot)$ nach $(\mathcal{P}(\{x_1, x_2\}), \triangle, \odot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ geben kann, so dass

$$f(\{x_1, x_2\}) = \{x_1\}, \quad f(\{x_1, x_3\}) = \{x_2\}, \quad f(\{x_2, x_3\}) = \{x_1\}$$

ist. Falls ja, begründen Sie, weshalb das gerade in dieser Konfiguration möglich ist, erklären Sie anderenfalls, wie die Bedingungen verändert werden müssen, damit dies möglich ist.

(b) Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über demselben Körper K und $(V_1, +, \cdot)$ sowie $(V_2, +, \cdot)$ Unterräume von $(V, +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass lineare Abbildungen $f_1\colon V_1 \to W$ und $f_2\colon V_2 \to W$ zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f|_{V_1} = f_1$ und $f|_{V_2} = f_2$ fortgesetzt werden können, wenn $f_1 = f_2$ auf $V_1 \cap V_2$ gilt. Entscheiden und beweisen Sie, unter welcher Bedingung an V_1 und V_2 diese Fortsetzung eindeutig ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.