R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 11 (Lösung)

Ausgabedatum: 12. Januar 2026
Abgabedatum: 19. Januar 2026

Übungsaufgabe I-11.1. (Beispiele linearer Gleichungssysteme)

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

über $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ in Abhängigkeit von z.

(b) Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^{\{1,2,3,4\}}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Basen

$$B_1 \coloneqq \{e_1 + e_3 + e_4,\ e_2 + 2e_3 + e_4,\ e_1 + e_4,\ 2e_2 + e_3 + e_4\}$$
$$B_2 \coloneqq \{2e_1 + e_3,\ 3e_2 + 2e_4,\ e_1 + 2e_2 + 3e_3 + e_4,\ e_1 + e_2 + e_3 + 5e_4\}$$

Bestimmen Sie die Linearkombinationskoeffizienten der Elemente in B_2 bezüglich B_1, indem Sie das dazugehörige lineare Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten aufstellen und lösen.

Lösung.

(a) Wir stellen die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems auf und überführen Sie in Zeilenstufenform.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & z \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z+3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right]$$

Hier sehen wir, dass der Rang von A genau dann dem von $A|b$ entspricht, wenn $z = 0$ ist. Nur dann ist das System lösbar. In dem Fall erkennen wir sofort, dass der Rang des Systems 2 ist, also haben wir einen $4 - 2 = 2$-dimensionalen affinen Lösungsraum. Für diesen Fall führen das System in die reduzierte Zeilenstufenform und erhalten

$$\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c} 3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die abhängigen Variablen gehören zu den Indizes aus $\{1, 4\}$, die unabhängigen zu denen aus $\{2, 3\}$. Wir erhalten also eine Partikulärlösung durch

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für das homogene System

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

erhalten wir $x_4 = 0$ und $x_1 = 2x_2 + 4x_3$ und damit die Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha + 4\beta \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(b) Für jedes Basiselement $f_i^{(2)} \in B_2$, $i = 1, \ldots, 4$ gilt es, die Koeffizienten x_k^i der Kombination

$$f_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{4} x_k^{(i)} f_k^{(1)}, \ i = 1, \ldots, 4$$

zu bestimmen, also das lineare Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten in dem die Koeffizienten der Polynome spaltenweise auftauchen, also

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Wie in der letzten Teilaufgabe überführt man das System in die Zeilenstufenform via

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Hier kann man nun den Vollrang der Matrix schon erkennen und damit die Invertierbarkeit überprüfen. Wir transformieren nun weiter in die reduzierte Zeilenstufenform (und invertieren damit letztendlich die Matrix).

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Auf der rechten Seite steht nun die Inverse der Systemmatrix angewandt auf die Matrix der rechten Seiten, und damit (spaltenweise) die Koeffizienten der Linearkombinationen.

Übungsaufgabe I-11.2. (Resultate zu Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme)

Es sei K ein Körper und $\tilde{K}$ ein echter Teilkörper von K sowie $n, m, k \in \mathbb{N}$ und $A \in \tilde{K}^{n \times m}$ und $b \in \tilde{K}^n$.

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ bezüglich K genau dann mit der bezüglich $\tilde{K}$ übereinstimmt, wenn das System eindeutig oder garnicht lösbar ist.

Lösung.

Sowohl für die Matrix A als auch für die erweitere Matrix $[A, b]$ werden bei der Bestimmung einer Rangfaktorisierung per Zeilenstufentransformation unabhängig vom zugrunde gelegten Körper (also K oder $\tilde{K}$) lediglich Matrizen aus $\tilde{K}^{n \times n}$ auftauchen. Insbesondere sieht man daran, dass $\operatorname{Rang}(A)$ und $\operatorname{Rang}([A, b])$ bezüglich einem beliebigen der beiden Körper bestimmt werden können.

Daraus können wir folgern, dass das System $Ax = b$ bezüglich beider Körper K und $\tilde{K}$ genau dann nicht lösbar ist, wenn $\operatorname{Rang}(A) \neq \operatorname{Rang}([A, b])$, siehe Satz 16.3. Dann ist die Lösungsmenge also unabhängig vom Körper leer.

Außerdem ist ebenfalls laut Satz 16.3 eindeutige Lösbarkeit äquivalent zu $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}([A, b]) = m$, ebenfalls wieder in beiden Körpern. Dass die Lösung dann in $\tilde{K}^n$ liegen muss, liegt eben an der Eindeutigkeit der Lösung.

Ist das System nun lösbar aber nicht eindeutig lösbar, so liefert Satz 16.3 gerade wieder die Existenz einer Partikulärlösung $x_0 \in \tilde{K}^n$, so dass

$$\mathcal{L}(A, b)_{\tilde{K}} = x_0 + \mathcal{L}(A, 0)_{\tilde{K}}$$
$$\mathcal{L}(A, b)_K = x_0 + \mathcal{L}(A, 0)_K$$

mit $\dim_K(\mathcal{L}(A, 0)_K) = \dim_{\tilde{K}}(\mathcal{L}(A, 0)_{\tilde{K}}) = m - \operatorname{Rang}(A)$. Dabei gilt offensichtlich $\mathcal{L}(A, 0)_{\tilde{K}} \subseteq \mathcal{L}(A, 0)_K$. Sobald aber das System lösbar ist und $\operatorname{Rang}(A) < m$ gilt, existiert ein $v \in \mathcal{L}(A, 0)_{\tilde{K}} \setminus \{0\}$ und für jedes $\alpha \in K \setminus \tilde{K}$ ist $\alpha v \in \mathcal{L}(A, 0)_K \setminus \mathcal{L}(A, 0)_{\tilde{K}}$ und die Lösungsmengen stimmen nicht überein.

Übungsaufgabe I-11.3. (Basics zu Vektorraumhomomorphismen)

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen Vektorraumhomomorphismen, -endomorphismen oder -automorphismen sind, und beweisen Sie Ihre Antwort.

  (i) $f : K_5 \ni (v_1, \dots, v_5) \mapsto (v_5, \dots, v_1) \in K_5$ jeweils über einem Körper K.

  (ii) $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \max(x, 0) \in \mathbb{R}$ jeweils über $\mathbb{R}$.

  (iii) $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto \mathbb{Q} \setminus M \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Es seien $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K. Zeigen Sie Satz 17.3(i), also dass wenn $f : V \to W$ und $g : U \to V$ lineare Abbildungen sind, dann ist auch $f \circ g : U \to W$ eine lineare Abbildung.

Lösung.

(a) (i) Hier handelt es sich um eine **lineare Abbildung**. Um die Strukturverträglichkeit nachzuprüfen seien $u = (u_1, \dots, u_5)$, $v = (v_1, \dots, v_5)$ aus K_5 und $\alpha \in K$ gegeben. Dann gilt

$$f(u + v) = f((u_1 + v_1, \dots, u_5 + v_5)) = (u_5 + v_5, \dots, u_1 + v_1) = (u_5, \dots, u_1) + (v_5, \dots, v_1) = f(u) + f(v)$$
$$f(\alpha\, u) = f((\alpha\, u_1, \dots, \alpha\, u_5)) = (\alpha\, u_5, \dots, \alpha\, u_1) = \alpha\, (u_5, \dots, u_1) = \alpha\, f(u).$$

Der Definitions- und Zielbereich der Abbildung stimmen überein, es handelt sich also auch um einen **Endomorphismus**. Die Bijektivität der Abbildung folgt sofort aus der komponentenweisen Struktur der Abbildung. Es handelt sich also sogar um einen **Isomorphismus**, also einen linearen **Automorphismus**.

(ii) Hier handelt es sich um **keine lineare Abbildung**, denn sogar beide Komponenten der Strukturverträglichkeit sind i. A. nicht gegeben, denn für $u = 1 = -v = -\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \max(1-1,0) = 0 \neq 1 = \max(1,0) + \max(-1,0) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha\, u) &= \max(-1,0) = 0 \neq -1 = -1 \max(1,0) = \alpha f(u). \end{aligned}$$

(iii) Hier handelt es sich um **keine lineare Abbildung**, denn es ist

$$f(\underbrace{\quad\emptyset\quad}_{=0\in(\mathcal{P}(\cdot),\triangle)}) = \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

(b) Sind f und g lineare Abbildungen wie angegeben und $u, v \in U$ sowie $\alpha \in K$, dann ist wegen der Linearität von f und g:

$$\begin{aligned} f \circ g(u+v) &= f(g(u+v)) = f(g(u)+g(v)) = f(g(u)) + f(g(v)) = f \circ g(u) + f \circ g(v) \\ f \circ g(\alpha u) &= f(g(\alpha u)) = f(\alpha g(u)) = \alpha f(g(u)) = \alpha f \circ g(u) \end{aligned}$$

Übungsaufgabe I-11.4. (Konstruktion linearer Abbildungen)

Wir betrachten die Vektorräume $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ über dem Körper $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(e_n) = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist eine solche Abbildung eindeutig, surjektiv, injektiv oder bijektiv?

Lösung.

Wir wissen bereits, dass die Familie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist. Satz 17.10 des Skripts liefert dann (für die Urbildfamilie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Bildfamilie $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$) direkt, dass eine solche gesuchte lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ existiert.

Die Familie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist allerdings nicht erzeugend in $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$. Wir können also aus dem oben referenzierten Theorem nicht direkt die Eindeutigkeit der linearen Abbildung folgern. Genauer kann man am Beweis des Theorems erkennen, dass eine solche Abbildung dann (mit Ausnahme des Nullraums als Bildraum) nicht eindeutig sein kann, denn ergänzt man die linear unabhängige Menge zu einer Basis, dann kann man die Bilder der ergänzten Basisvektoren beliebig wählen.

Die Familie $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{R}$ offensichtlich erzeugend und linear abhängig, da die Anzahl der (nicht-Null) Vektoren die Dimension des Raums, also 1, überschreitet. Entsprechend ist jede solche Abbildung surjektiv aber nicht injektiv und damit nicht bijektiv.

Hausaufgabe I-11.1 (Beispiele linearer Gleichungssysteme) 2 + 4 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ in Abhängigkeit von r, s;

(b) Gegeben sei $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ und eine einelementige Menge Y sowie die Basen

$$B_1 \coloneqq (\{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_2\})$$
$$B_2 \coloneqq (X \setminus \{x_i\})_{i \in [\![1,4]\!]}$$

zu dem Vektorraum $(\mathcal{P}(X), \triangle, \odot)$ über $(\mathcal{P}(Y), \triangle, \cap)$.

Bestimmen Sie die Linearkombinationskoeffizienten der Mitglieder in B_2 bezüglich B_1 und die der Mitglieder in B_1 bezüglich B_2, indem Sie die dazugehörigen linearen Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten aufstellen und lösen.

Lösung.

(a) Wir stellen die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems auf und überführen Sie in Zeilenstufenform.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & r \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -8 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & r \\ 0 & -1 & -1 & 1 & r-8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & r \\ 0 & -1 & -1 & 1 & r-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4r-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{array}\right]$$

Hier sehen wir, dass der Rang von A genau dann dem von $A|b$ entspricht, wenn $s = 0$ und $r = 2$ ist. Ansonsten ist das Gleichungssystem nicht lösbar. In dem Fall erkennen wir sofort, dass der Rang des Systems 2 ist, also haben wir einen $4 - 2 = 2$-dimensionalen affinen Lösungsraum. Für diesen Fall führen das System in die reduzierte Zeilenstufenform und erhalten

$$\begin{array}{r}\cdot(-\frac{1}{2}) \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die abhängigen Variablen gehören zu den Indizes aus $\{1, 2\}$, die unabhängigen zu denen aus $\{3, 4\}$. Wir erhalten also eine Partikulärlösung durch

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für das homogene System

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

erhalten wir $x_2 = x_4 - x_3$ und $x_1 = -\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$, also ist eine Basis des Lösungsraum durch die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben und die gesamte Lösungsmenge ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ \beta - \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(2 Punkte)

(b) Für jedes $X \setminus \{x_i\}^{\in} B_2,\ i = 1, \dots, 4$ gilt es, die Koeffizienten α_k^i der Kombination

$$X \setminus \{x_i\} = \mathop{\bigtriangleup}\limits_{k=1}^{4} \alpha_k^{(i)} A_i,\ i = 1, \dots, 4$$

zu bestimmen, also das lineare Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten in dem die Koeffizienten der Teilmengen spaltenweise auftauchen, also

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & Y & Y & Y & \emptyset & Y & Y & Y \\ \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y & Y \\ Y & Y & \emptyset & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y \\ \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset \end{array}\right]$$

Wie in der letzten Teilaufgabe überführt man das System in die Zeilenstufenform via

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & Y & Y & Y & \emptyset & Y & Y & Y \\ \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y & Y \\ Y & Y & \emptyset & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y \\ \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & Y & Y & Y & \emptyset & Y & Y & Y \\ \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y & Y \\ \emptyset & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset & Y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & Y & Y & Y & \emptyset & Y & Y & Y \\ \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y & Y \\ \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & \emptyset & \emptyset \end{array}\right]$$

Hier kann man nun den Vollrang der Matrix schon erkennen. Wir transformieren nun weiter in die reduzierte Zeilenstufenform (und invertieren damit letztendlich die Matrix).

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & Y & Y & Y & \emptyset & Y & Y & Y \\ \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y & Y \\ \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & \emptyset & \emptyset \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & Y & Y & Y & \emptyset & Y & Y & Y \\ \emptyset & Y & \emptyset & \emptyset & Y & Y & Y & Y \\ \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & \emptyset & \emptyset \end{array}\right] \rightsquigarrow \quad \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset \\ \emptyset & Y & \emptyset & \emptyset & Y & Y & Y & Y \\ \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & \emptyset & \emptyset \end{array}\right].$$

Auf der rechten Seite steht nun die Inverse der Systemmatrix angewandt auf die Matrix der rechten Seiten, und damit (spaltenweise) die Koeffizienten der Linearkombinationen. (2 Punkte)

Analog geht man vor um die Darstellung der Basismiglieder der ersten Basis bezüglich der zweiten Basis zu bestimmen. Wir vertauschen hier die Reihenfolge der Spalten der Einfachheit halber nicht und erhalten die Lösungen spaltenweise auf der linken Seite

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & Y & Y & Y & \emptyset & Y & Y & Y \\ \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y & Y \\ Y & Y & \emptyset & \emptyset & Y & Y & \emptyset & Y \\ \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} Y & \emptyset & Y & Y & Y & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset & Y & \emptyset & \emptyset \\ Y & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & Y & \emptyset \\ \emptyset & Y & Y & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & Y \end{array}\right].$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe I-11.2 (Resultate zu Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme) 1 + 2 + 2 = 5 Punkte

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{n \times m}$ und $b \in K^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(A, b)$ genau dann ein Unterraum von K^m ist, wenn $b = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $M \in K^{k \times n}$ gilt:

$$\mathcal{L}(MA, Mb) = \mathcal{L}(A, b + \mathcal{L}(M, 0)) \coloneqq \bigcup_{c \in \mathcal{L}(M,0)} \mathcal{L}(A, b + c).$$

(c) Zeigen Sie, dass für alle $M \in K^{m \times k}$ gilt:

$$\mathcal{L}(AM, b) = \mathcal{L}(M, \mathcal{L}(A, b)) \coloneqq \bigcup_{c \in \mathcal{L}(A,b)} \mathcal{L}(M, c).$$

Lösung.

(a) Wenn $\mathcal{L}(A, b)$ ein Unterraum ist, dann liegt die 0 darin, also ist $A0 = 0 = b$. Dass es sich in diesem Fall tatsächlich um einen Unterraum handelt ist in Satz 16.3 nachgewiesen. (1 Punkt)

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(MA, Mb) &= \left\{ x \in K^m \,\middle|\, MA\,x = Mb \right\} \\
&= \left\{ x \in K^m \,\middle|\, M(A\,x - b) = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in K^m \,\middle|\, A\,x - b \in \mathcal{L}(M, 0) \right\} \\
&= \left\{ x \in K^m \,\middle|\, \exists c \in \mathcal{L}(M, 0) \text{ mit } A\,x - b = c \right\} \\
&= \bigcup_{c \in \mathcal{L}(M,0)} \mathcal{L}(A, b + c).
\end{aligned}$$

(2 Punkte)

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(AM, b) &= \left\{ x \in K^k \,\middle|\, AM\,x = b \right\} \\
&= \left\{ x \in K^k \,\middle|\, M\,x \in \mathcal{L}(A, b) \right\} \\
&= \left\{ x \in K^k \,\middle|\, \exists c \in \mathcal{L}(A, b) \text{ mit } M\,x = c \right\} \\
&= \bigcup_{c \in \mathcal{L}(A,b)} \left\{ x \in K^k \,\middle|\, M\,x = c \right\} \\
&= \bigcup_{c \in \mathcal{L}(A,b)} \mathcal{L}(M, c).
\end{aligned}$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe I-11.3 (Basics zu Vektorraumhomomorphismen) 1.5 + 1 + 1.5 + 3 = 7 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen Vektorraumhomomorphismen, -endomorphismen oder -automorphismen sind, und beweisen Sie Ihre Antwort.

(i) $f\colon \mathbb{R}_5 \ni (v_1, \dots, v_5) \mapsto (3\,v_1, 2\,v_4 + v_1, 0, 0, v_5 + 1) \in \mathbb{R}_5$ jeweils über $\mathbb{R}$.

(ii) $f\colon \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \ni f \mapsto f^2 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ jeweils mit den punktweisen Funktionsverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, wobei $f^2 = f \cdot_2 f$ punktweise zu verstehen ist.

(iii) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto M \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K und $f\colon V \to W$ bijektiv. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Vektorraumisomorphismus von V nach W ist, wenn f^{-1} ein Vektorraumisomorphismus von W nach V ist.

(c) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Vektorraumendomorphismus mit $v \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$f^{(n)}(v) \coloneqq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}}(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(v) \coloneqq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n+1\text{-mal}}(v) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\left\{v, f(v), \dots, f^{(n)}(v)\right\}$ linear unabhängig ist.

(d) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K der Charakterstik $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie:

(i) Ist $f\colon V \to V$ ein selbstinverser Vektorraumautomorphismus, dann sind

$$V_+(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = v\} \qquad \text{und} \qquad V_-(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = -v\}$$

V-komplementäre Unterräume.

(ii) Sind U und W zwei V-komplementäre Unterräume, dann gibt es genau einen selbstinversen Vektorraumautomorphismus mit $V_+(f) = U$ und $V_-(f) = W$.

Lösung.

(a) (i) Hier handelt es sich um **keine lineare Abbildung**, denn es ist

$$f(0) = (0, 0, 0, 0, 1) \neq 0.$$

(0.5 Punkte)

(ii) Hier handelt es sich um eine **lineare Abbildung**, denn für jedes $z \in \mathbb{Z}_2$ ist $z^2 = z \cdot_2 z = z$ und damit ist f die Identitätsabbildung, für welche die Linearität offensichtlich ist. Damit ist auch klar, dass es sich auch um einen **Endo**-, **Iso**- und somit auch **Automorphismus** handelt. (0.5 Punkte)

(iii) Hier handelt es sich um eine **lineare Abbildung**. Die Additivität folgt sofort daraus, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ für nichtleere X, wie wir wissen, einen Ring bildet und damit die Distributivitätsgesetze erfüllt sind. Die Homogenität sieht man für $M \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ an Hand von

$$\begin{aligned} f(1M) &= (1M) \cap \mathbb{N} = M \cap \mathbb{N} = 1\,(M \cap \mathbb{N}) = 1\,f(M) \\ f(0\,M) &= (0\,M) \cap \mathbb{N} = \emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset = 0\,(M \cap \mathbb{N}) = 0\,f(M). \end{aligned}$$

Allerdings ist die Abbildung nicht bijektiv, denn es haben nur Teilmengen der natürlichen Zahlen Urbilder, also handelt es sich nur um einen **Endomorphismus**. (0.5 Punkte)

(b) Ist $f^{-1}\colon W \to V$ eine lineare Abbildung und $u, v \in V$, $\alpha \in K$, dann ist

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(f^{-1}(f(u)) + f^{-1}(f(v))) = f(f^{-1}(f(u) + f(v))) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) &= f(\alpha f^{-1}(f(u))) = f(f^{-1}(\alpha f(u))) = \alpha f(u). \end{aligned}$$

Die Gegenrichtung folgt mit vertauschten Rollen. (1 Punkt)

(c) Für jede Linearkombination der 0 mit Koeffizienten $\alpha_k \in K$, $k = 0, \dots, n$ der Form

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^{(k)}(v) = 0$$

und $i \in \mathbb{N}$ ist

$$0 = f^{(i)}(0) = f^{(i)}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^{(k)}(v)\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^{(k+i)}(v) = \sum_{k=0}^{n-i} \alpha_k f^{(k+i)}(v).$$

Für $i = n$ folgt, dass $\alpha_{n-n} = \alpha_0 = 0$ sein muss und sukzessive folgt für jeweils kleinere i, dass $\alpha_{n-i} = 0$ für alle $i = n, \dots, 0$ und damit alle der Linearkombinationskoeffizienten. (1.5 Punkte)

(d) Die Aufgabe zeigt, dass selbstinverse Vektorraumautomorphismen im Grunde nur Anteile spiegeln und Anteile unverändert lassen.

(i) Dass es sich bei beiden Mengen um Unterräume handelt folgt mit dem Unterraumkriterium. Dabei ist wegen $f(0) = 0 = -0 \in V_+ \cap V_-$ klar dass beide nichtleer sind. Die Abgeschlossenheit beider Mengen unter den Vektorraumoperationen folgt direkt aus der Linearität von f. Wir zeigen das einmal exemplarisch für V_-. Dafür seien $u, v \in V_-$, $\alpha, \beta \in K$ dann ist

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha(-u) + \beta(-v) = -(\alpha u + \beta v).$$

(0.5 Punkte)

Für die Trivialschnitteigenschaft sei $v \in V_+ \cap V_-$, dann gilt

$$0 = f(0) = f(v - v) = f(v) - f(v) = v - (-v) = \underbrace{2}_{1+1} v,$$

also muss $v = 0$ gewesen sein (Achtung, das gilt wieder nur wegen der Charakteristikeinschränkung). (0.5 Punkte)

Die Erzeugendeneigenschaft ergibt sich durch die Zerlegung

$$v = \underbrace{\frac{1}{2}(v + f(v))}_{\in V_+(f)} + \underbrace{\frac{1}{2}(v - f(v))}_{\in V_-(f)}$$

die wir schon aus dem Beispiel der Transposition von Matrizen aus dem letzten Übungsblatt kennen, siehe Hausaufgabe I-10.4 . Diese Zerlegung funktioniert nur, weil es sich um einen selbstinversen Automorphismus handelt. (1 Punkt)

Beachte: Hat der Körper Charakteristik 2, dann ist $V_-(f) = V_+(f)$ und die einzige selbstinverse lineare Abbildung ist die Identität.

(ii) Der entsprechende Automorphismus ist durch sein Verhalten auf den komplementären Unterräumen bereits vollständig vorgegeben, denn auf Grund der Komplementarität können wir jedes v eindeutig als $v = u + w$ mit u, w aus U bzw. W schreiben und eine lineare Abbildung f muss

$$f(v) = f(u) + f(w)$$

erfüllen. Die Bijektivität folgt dann sofort aus der Bijektivität der Identität über die entsprechende Abbildung der Anteile. (1 Punkt)

Hausaufgabe I-11.4 (Konstruktion linearer Abbildungen) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Gegeben sei $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Entscheiden Sie, ob es eine lineare Abbildung f von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \odot)$ nach $(\mathcal{P}(\{x_1, x_2\}), \triangle, \odot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ geben kann, so dass

$$f(\{x_1, x_2\}) = \{x_1\}, \quad f(\{x_1, x_3\}) = \{x_2\}, \quad f(\{x_2, x_3\}) = \{x_1\}$$

ist. Falls ja, begründen Sie, weshalb das gerade in dieser Konfiguration möglich ist, erklären Sie anderenfalls, wie die Bedingungen verändert werden müssen, damit dies möglich ist.

(b) Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über demselben Körper K und $(V_1, +, \cdot)$ sowie $(V_2, +, \cdot)$ Unterräume von $(V, +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass lineare Abbildungen $f_1\colon V_1 \to W$ und $f_2\colon V_2 \to W$ zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f|_{V_1} = f_1$ und $f|_{V_2} = f_2$ fortgesetzt werden können, wenn $f_1 = f_2$ auf $V_1 \cap V_2$ gilt. Entscheiden und beweisen Sie, unter welcher Bedingung an V_1 und V_2 diese Fortsetzung eindeutig ist.

Lösung.

(a) Es ist nicht möglich eine solche lineare Abbildung zu finden, denn die Familie der Vektoren, deren Bilder vorgeschrieben werden sollen, ist linear abhängig. Insbesondere ist

$$\{x_1, x_2\} \triangle \{x_1, x_3\} = \{x_2, x_3\}$$

aber

$$\{x_1\} \triangle \{x_2\} \neq \{x_1\}.$$

Die Bedingungen können vielfältig angepasst werden, um erfüllbar zu werden. Man könnte die dritte Bedingung vollständig weglassen, deren Bild auf $\{x_1, x_2\}$ setzen oder statt ein Bild für $\{x_2, x_3\}$ zu fordern, das Bild eines Vektors außerhalb des Spans der ersten beiden Vektoren fordern, z. B. für $\{x_3\}$, welches man dann beliebig wählen könnte. (2 Punkte)

(b) Wir können eine Basis $B_\cap$ von $V_1 \cap V_2$ zu einer Basis B_1 von V_1 und einer Basis B_2 von V_2 ergänzen. Die Menge $B_1 \cup B_2$ ist dann eine Basis von $V_1 + V_2$. Wieder können wir aus Satz 17.10 folgern, dass dann eine eindeutige lineare Abbildung $f\colon V_1 + V_2 \to W$ existiert, die die Fortsetzungsbedingung erfüllt. Ist $V_1 + V_2 = V$ ist die Fortsetzung also eindeutig und ihre Existenz nachgewiesen. Ist $V_1 + V_2 \neq V$, dann können wir $B_1 \cup B_2$ zu einer Basis B von V ergänzen und für jedes $v \in B \setminus (B_1 \cup B_2)$ haben wir freie Bildwahl in W, die ist also nur eindeutig, wenn W der Nullraum ist. (2 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.