R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 10

Ausgabedatum: 15. Dezember 2025
Abgabedatum: 12. Januar 2026

Übungsaufgabe I-10.1. (Basics zu Matrizen)

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A_0\colon [\![1,1]\!] \times [\![1,1]\!] \ni (i,j) \mapsto 1, \qquad A_1\colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, & i+j=5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_2\colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 2, & i=j \\ 1, & |i-j|=2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_3\colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto i+j-2$$

$$A_4\colon [\![1,6]\!] \times [\![1,3]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_5\colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto i$$

(a) Geben Sie die explizite, elementweise Form (15.1 aus dem Skript) der Matrizen an.

(b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen quadratisch, Diagonalmatrizen und Einheitsmatrizen sind.

(c) Geben Sie für jedes $k \in [\![0,5]\!]$ zu dem dazugehörigen A_k (wenn möglich) die k-te Spalte, k-te Zeile und die Einträge entlang der k-ten Diagonalen an.

(d) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ die Summe $A_k + A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Summen für die Fälle $k \neq l$.

(e) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ das Produkt $A_k\, A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Produkte für die Fälle $k \neq l$. **Hinweis:** Arbeiten Sie schon hier möglichst spalten- und zeilenweise.

Übungsaufgabe I-10.2. (Mehr zu spalten-/zeilenweiser Matrixmultiplikation)

Gegeben sei die Matrix
$$B \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$
und $n \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie verbal, wie die Produkte
$$B\,A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{3 \times n} \qquad \text{und} \qquad A\,B \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n \times 2}$$
aus den Zeilen bzw. Spalten der Matrizen A zusammengesetzt sind.

Übungsaufgabe I-10.3. (Elementarmatrizen, Rang und Zeilenstufenform)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vertauschung zweier Zeilen einer Matrix durch Matrixmultiplikation mit Elementarmatrizen vom Typ I und Typ II realisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie den Rang und eine Rangfaktorisierung der folgenden Matrizen:

(i) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 3}$

Übungsaufgabe I-10.4. (Transposition kann nicht durch Matrixmultiplikation dargestellt werden)

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass genau dann Matrizen $S, T \in K^{m \times n}$ existieren, so dass $S\,A\,T = A^\mathsf{T}$ für alle $A \in K^{n \times m}$, wenn $n = m = 1$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathbb{K}^{n \times m} \ni E_{ij} = \underbrace{e_i}_{\in K^{n \times 1}} \underbrace{e_j^\mathsf{T}}_{\in K^{1 \times m}}$ und untersuchen Sie diese Matrizen in der Rolle von A um einen Widerspruch zu erhalten.

Übungsaufgabe I-10.5. (Ring quadratischer Matrizen)

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Weiterhin sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Matrixprodukt von n beliebigen strikten oberen Dreiecksmatrizen aus dem $K^{n \times n}$ die Nullmatrix ergibt. Zeigen Sie weiter, dass das Lemma 15.36 impliziert, also dass $A^n = 0$ für jede strikte obere Dreiecksmatrix $A \in K^{n \times n}$ gilt.

(b) Entscheiden Sie, ob die Ringe der Mengen $K_{\diagdown}^{n \times n}$, $K_{\urcorner\!\triangleright}^{n \times n}$ und $K_{\llcorner\!\triangleleft}^{n \times n}$ mit der Matrixaddition und -multiplikation kommutativ sind. Falls ja, kommutieren die jeweiligen Matrizen auch mit allen Matrizen aus $K^{n \times n}$?

Übungsaufgabe I-10.6. (Allgemeine lineare Gruppe)

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, K)$ genau dann endlich ist, wenn K endlich ist.

(b) Bestimmen Sie die von der Menge der Elementarmatrizen vom Typ I erzeugte Untergruppe in $\mathrm{GL}(n, K)$.

Hausaufgabe I-10.1 (Basics zu Matrizen) 1.5 + 0.5 + 2 + 1 + 2 = 7 Punkte

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A_0 \colon [\![1,1]\!] \times [\![1,1]\!] \ni (i,j) \mapsto 15, \qquad A_1 \colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 0, & i+j=2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_2 \colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 2, & i=j+1 \\ 3, & |i-j|=2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_3 \colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto i \cdot j - 2$$

$$A_4 \colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_5 \colon [\![1,4]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto j$$

(a) Geben Sie die explizite, elementweise Form (15.1 aus dem Skript) der Matrizen an.

(b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen quadratisch, Diagonalmatrizen und Einheitsmatrizen sind.

(c) Geben Sie für jedes $k \in [\![0,5]\!]$ zu dem dazugehörigen A_k (wenn möglich) die k-te Spalte, k-te Zeile und die Einträge entlang der k-ten Diagonalen an.

(d) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ die Summe $A_k + A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Summen für die Fälle $k \neq l$.

(e) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ das Produkt $A_k\,A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Produkte für die Fälle $k \neq l$. **Hinweis:** Arbeiten Sie schon hier möglichst spalten- und zeilenweise.

Hausaufgabe I-10.2 (Mehr zu spalten-/zeilenweiser Matrixmultiplikation) 2 Punkte

Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ an, die für beliebige $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ beide folgenden Bedingungen erfüllt. Entscheiden und erklären Sie, ob die Matrix B eindeutig bestimmt ist.

- Die erste Spalte von $A\,B$ ist gegeben durch die Summe der ersten Spalte und der vierfachen letzten Spalte von A und die letzte Spalte von $A\,B$ ist gegeben durch ein vielfaches der Summe aller Spalten von A.
- Die zweite und dritte Zeile von $B\,A$ sind die Summe des zweifachen der zweiten Zeile von A und des (-3)-fachen der dritten Zeile von A.

Hausaufgabe I-10.3 (Elementarmatrizen, Rang und Zeilenstufenform) 1.5 + 1 + 3.5 = 6 Punkte

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie zu jeder Elementarmatrix D, S, T vom Typ I-III eine entsprechende Elementarmatrix D', S', T' an, für die $D' D = S' S = T' T = I$ gilt, und zeigen Sie damit Lemma 15.43.

(b) Beschreiben Sie, was die Elementarmatrizen vom Typ I-III bei Multiplikation von rechts bewirken.

(c) Bestimmen Sie den Rang und eine Rangfaktorisierung der folgenden Matrizen:

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ (ii) $\begin{bmatrix} \bot & \top & \top \\ \top & \bot & \top \\ \top & \top & \bot \end{bmatrix} \in (\{\top, \bot\}, \mathrm{XOR}, \wedge)^{3\times 3}$

Hausaufgabe I-10.4 (Transposition und (Anti-)Symmetrie) 3.5 + 0.5 = 4 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn die Charakteristik $\operatorname{char}(K) \neq 2$ ist, dann sind $K^{n\times n}_{\text{sym}}$ und $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ Unterräume von $K^{n\times n}$ der Dimensionen

$$\begin{aligned} \dim(K^{n\times n}_{\text{sym}}) &= \frac{1}{2} n\,(n+1) \\ \dim(K^{n\times n}_{\text{skew}}) &= \frac{1}{2} n\,(n-1), \end{aligned}$$

und es gilt

$$K^{n\times n} = K^{n\times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n\times n}_{\text{skew}}$$

(Lemma 15.32). Geben Sie dazu die eindeutige Zerlegung $A = A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}}$ für $A \in K^{n\times n}$ an.

(b) Wenn die Charakteristik $\operatorname{char}(K) = 2$ ist (z. B. $K = \mathbb{Z}_2$), dann ist $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$. Was ist die Dimension von $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$ in diesem Fall?

Hausaufgabe I-10.5 (Ring quadratischer Matrizen) 1 + 1 + 1 = 3 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

(a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Folgerung 15.46, also dass für beliebige Matrizen $A \in K^{n\times m}$ und invertierbare Matrizen $B \in K^{n\times n}$, $C \in K^{m\times m}$ die Gleichheit

$$\operatorname{Rang}(B\,A\,C) = \operatorname{Rang}(A) \tag{15.36}$$

gilt.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob $K^{n\times n} \ni A \mapsto A^\intercal \in K^{n\times n}$ ein Ringautomorphimus von Ringen mit Eins ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass die einzigen Ideale im Ring $K^{n \times n}$ die trivialen sind. Dennoch ist im allgemeinen $K^{n \times n}$ kein Körper. Weshalb ist das kein Widerspruch zu Hausaufgabe I-7.4 Teilaufgabe (c)?

Hausaufgabe I-10.6 (Allgemeine lineare Gruppe) 2 + 3 = 5 Punkte

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$P := \{A \in K^{n \times n} \mid \text{In jeder Zeile und jeder Spalte von } A \text{ steht genau eine } 1 \text{ und sonst } 0\} \subseteq \mathrm{GL}(n, K).$$

(i) Zeigen Sie, dass P mit der Matrixmultiplikation eine zur $(S_n, \circ)$ isomorphe Gruppe bildet.

(ii) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = A^\intercal$ für alle $A \in P$.

(iii) Bestimmen Sie eine Zerlegung der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in das Produkt von Elementarmatrizen vom Typ III.

(b) (i) Bestimmen Sie alle Elemente der $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

Hinweis: Überführen Sie ein allgemeines $A \in \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ in Zeilenstufenform und unterscheiden Sie geeignete Fälle.

(ii) Bestimmen Sie die Ordnung für alle Elemente aus $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ nicht kommutativ ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.