Übung I - 10 (Lösung)

Ausgabedatum: 15. Dezember 2025
Abgabedatum: 12. Januar 2026

Übungsaufgabe I-10.1. (Basics zu Matrizen)

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A_0 \colon [\![1, 1]\!] \times [\![1, 1]\!] \ni (i, j) \mapsto 1, \qquad A_1 \colon [\![1, 4]\!] \times [\![1, 4]\!] \ni (i, j) \mapsto \begin{cases} 1, & i + j = 5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_2 \colon [\![1, 3]\!] \times [\![1, 6]\!] \ni (i, j) \mapsto \begin{cases} 2, & i = j \\ 1, & |i - j| = 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_3 \colon [\![1, 4]\!] \times [\![1, 4]\!] \ni (i, j) \mapsto i + j - 2$$

$$A_4 \colon [\![1, 6]\!] \times [\![1, 3]\!] \ni (i, j) \mapsto \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_5 \colon [\![1, 3]\!] \times [\![1, 6]\!] \ni (i, j) \mapsto i$$

(a) Geben Sie die explizite, elementweise Form (15.1 aus dem Skript) der Matrizen an.

(b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen quadratisch, Diagonalmatrizen und Einheitsmatrizen sind.

(c) Geben Sie für jedes $k \in [\![0, 5]\!]$ zu dem dazugehörigen A_k (wenn möglich) die k-te Spalte, k-te Zeile und die Einträge entlang der k-ten Diagonalen an.

(d) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0, 5]\!]$ die Summe $A_k + A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Summen für die Fälle $k \neq l$.

(e) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0, 5]\!]$ das Produkt $A_k\, A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Produkte für die Fälle $k \neq l$. **Hinweis:** Arbeiten Sie schon hier möglichst spalten- und zeilenweise.

Lösung.

(a) Um die „Tableau-Form" der Matrizen zu erhalten, wertet man einfach die gegebene Vorschrift an jedem benötigten Indexpaar aus. Dabei können bestimmte Indexkombinationen in Abhängigkeit von der Struktur der Vorschrift natürlich ausgelassen werden. Bei dem ersten Beispiel ist die Abbildung ja bspw. konstant, hier kann man also einfach die konstante Einsmatrix der passenden Dimension hinschreiben.

Die Matrizen haben die Form

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Quadratisch sind entsprechend die Matrizen $A_0 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und $A_1, A_3 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Diagonalmatrizen sind die Matrizen A_0 und A_4. Davon ist A_0 die einzige Einheitsmatrix.

(c) k=0: Die 0-te Spalte und Zeile von A_0 existiert nicht. Es ist aber die Hauptdiagonale die 0-te Diagonale und in diesem Fall also lediglich $a_{11} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$.

k=1: Die Einträge entlang der ersten Diagonalen von A_1 sind gegeben als

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{23} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste Spalte und Zeile von A_1 sind gegeben durch

$$[\![1,4]\!] \ni i \longrightarrow a_{i1} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\![1,4]\!] \ni j \longrightarrow a_{1j} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

k=2: Die Einträge entlang der zweiten Diagonalen von A_2 sind gegeben als

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{24} & a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Spalte und Zeile von A_2 ist gegeben durch

$$[\![1,3]\!] \ni i \longrightarrow a_{i2} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\![1,6]\!] \ni j \longrightarrow a_{2j} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

k=3: Die Einträge entlang der dritten Diagonalen von A_3 sind gegeben als

$$(a_{14}, \ldots, a_{14}) = (3).$$

Die dritte Spalte und Zeile von A_3 ist gegeben durch

$$[\![1,4]\!] \ni i \longrightarrow a_{i3} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$[\![1,4]\!] \ni j \longrightarrow a_{3j} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

k=4: Die vierte Diagonale von A_4 existiert nicht. Die vierte Spalte existiert ebenfalls nicht, die vierte Zeile von A_4 ist gegeben durch

$$[\![1,3]\!] \ni j \longrightarrow a_{4j} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

k=5: Die Einträge entlang der fünften Diagonalen von A_5 sind gegeben als

$$(a_{16}, \ldots, a_{16}) = (1).$$

Die fünfte Zeile existiert nicht, die fünfte Spalte von A_5 ist gegeben durch

$$[\![1,3]\!] \ni i \longrightarrow a_{i5} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Matrizen können genau dann addiert werden, wenn sie die gleichen Dimensionen haben. Insbesondere kann die Summe jeder Matrix mit sich selbst gebildet werden. Außerdem ist die Matrixaddition kommutativ, jede mögliche Summe kann also auch mit vertauschten Indizes gebildet werden. Berechnet werden muss also

$$A_1 + A_3 = A_3 + A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 + A_5 = A_5 + A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(e) Matrizen können genau dann multipliziert werden, wenn die innere Dimension übereinstimmt. Insbesondere können Matrizen genau dann mit sich selbst multipliziert werden, wenn sie quadratisch sind. Zusätzlich sind die folgenden Kombinationen möglich

$$A_1\,A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (A_1 \text{ tauscht die Zeilenreihenfolge})$$

$$A_3\,A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad (A_1 \text{ tauscht die Spaltenreihenfolge})$$

$$A_4\,A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A_4 \text{ erhält Zeilen und füllt mit } 0 \text{ auf})$$

$$A_4\,A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A_4 \text{ erhält Zeilen und füllt mit } 0 \text{ auf})$$

$$A_2\,A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (A_4 \text{ wählt die ersten Spalten aus})$$

$$A_5\,A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad (A_4 \text{ wählt die ersten Spalten aus})$$

Übungsaufgabe I-10.2. (Mehr zu spalten-/zeilenweiser Matrixmultiplikation)

Gegeben sei die Matrix

$$B \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

und $n \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie verbal, wie die Produkte

$$B\,A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{3\times n} \qquad \text{und} \qquad A\,B \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n\times 2}$$

aus den Zeilen bzw. Spalten der Matrizen A zusammengesetzt sind.

Lösung.

Das Produkt $B\,A$ liegt in $\mathbb{R}^{2\times n}$, hat also zwei Zeilen. In der ersten Zeile von BA steht die Summe aus der ersten und dem (-3)-fachen der letzten Zeile von A. In der zweiten Zeile von BA steht die Summe aus dem (-2)-fachen der ersten Zeile und dem vierfachen der letzten Zeile von A.

Das Produkt $A\,B$ liegt in $\mathbb{R}^{n\times 3}$, hat also drei Spalten. In der ersten Spalte von AB steht die Summe der ersten Spalte und dem (-2)-fachen der zweiten Spalte von A, die zweite Spalte ist eine Nullspalte und die letzte Spalte die Summe des (-3)-fachen der ersten und dem vierfachen der zweiten Spalte von A.

Übungsaufgabe I-10.3. (Elementarmatrizen, Rang und Zeilenstufenform)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vertauschung zweier Zeilen einer Matrix durch Matrixmultiplikation mit Elementarmatrizen vom Typ I und Typ II realisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie den Rang und eine Rangfaktorisierung der folgenden Matrizen:

(i) $$\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

(ii) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$$

Lösung.

(a) Sei eine Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \rule{2em}{0.4pt} & a_{1\bullet} & \rule{2em}{0.4pt} \\ & \vdots & \\ \rule{2em}{0.4pt} & a_{i\bullet} & \rule{2em}{0.4pt} \\ & \vdots & \\ \rule{2em}{0.4pt} & a_{j\bullet} & \rule{2em}{0.4pt} \\ & \vdots & \\ \rule{2em}{0.4pt} & a_{m\bullet} & \rule{2em}{0.4pt} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

gegeben, in der wir die i-te und j-te Zeilen tauschen wollen. Für eine kompaktere Darstellung verzichten wir nun auf die vertikalen Punkte, die die ausgelassenen Zeilen markieren.

Dann können wir wie folgt vorgehen:

$$
\begin{bmatrix} \text{---} & a_{1\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{i\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{j\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{m\bullet} & \text{---} \end{bmatrix}
\rightsquigarrow
\begin{bmatrix} \text{---} & a_{1\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{i\bullet} + a_{j\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{j\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{m\bullet} & \text{---} \end{bmatrix}
\qquad \text{(Zeile } j \text{ auf Zeile } i \text{ add.)}
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{bmatrix} \text{---} & a_{1\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{i\bullet} + a_{j\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{j\bullet} - (a_{i\bullet} + a_{j\bullet}) = -a_{i\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{m\bullet} & \text{---} \end{bmatrix}
\qquad \text{(Zeile } i \text{ von Zeile } j \text{ abz.)}
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{bmatrix} \text{---} & a_{1\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{i\bullet} + a_{j\bullet} - a_{i\bullet} = a_{j\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & -a_{i\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{m\bullet} & \text{---} \end{bmatrix}
\qquad \text{(Zeile } j \text{ auf Zeile } i \text{ add.)}
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{bmatrix} \text{---} & a_{1\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{j\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{i\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & a_{m\bullet} & \text{---} \end{bmatrix}.
\qquad \text{(Zeile } j \text{ mit } -1 \text{ multiplizieren.)}
$$

(b) Die unten stehenden Lösungen habe alle die Struktur, dass wir mit der zu untersuchenden Matrix A starten, und eine Identität als $A = IA$ ergänzen. Zwischen der linken Matrix (anfangs I) und der rechten Matrix (anfangs A) ergänzen wir dann sukzessive Elementarmatrizen und ihre Umkehrung (ihre Inverse) und multiplizieren dann die rechte Elementarmatrix von links an die rechte Matrix und die linke Elementarmatrix von rechts an die linke Matrix. Dieses Vorgehen entspricht dem, was man in Implementierungen umsetzen würde, um Speicher zu sparen. Um Platz zu sparen schreiben wir dabei die Produkte von Elementarmatrizen des Typ II zu verschiedenen Zeilensummen zusammen.

(i) Es ist

$$
\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Entsprechend ist der Rang 2, wie man an der inneren Dimension der Rangfaktorisierung abliest.

(ii) Wir können analog zur ersten Teilaufgabe vorgehen, benötigen jetzt aber die entsprechenden Rechenoperationen in $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

was schon die fertige Rangfaktorisierung ist, und der Rang ist 3.

Übungsaufgabe I-10.4. (Transposition kann nicht durch Matrixmultiplikation dargestellt werden)

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass genau dann Matrizen $S, T \in K^{m \times n}$ existieren, so dass $S\,A\,T = A^\intercal$ für alle $A \in K^{n \times m}$, wenn $n = m = 1$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathbb{K}^{n \times m} \ni E_{ij} = \underbrace{e_i}_{\in K^{n \times 1}} \underbrace{e_j^\intercal}_{\in K^{1 \times m}}$ und untersuchen Sie diese Matrizen in der Rolle von A um einen Widerspruch zu erhalten.

Lösung.

Im Fall $n = m = 1$ sind die Matrizen offensichtlich durch $S = T = 1$ gegeben.

Im Fall $n+m > 2$ müsste für jede Kombination von Indizes $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, m]\!]$ entsprechend

$$E_{ji} = E_{ij}^\intercal = SE_{ij}T = Se_ie_j^\intercal T = S_{\bullet i}T_{j\bullet}$$

gelten.

Insbesondere gilt das für die Einträge zu den Indizes j, i, also muss

$$1 = (E_{ji})_{ji} = (S_{\bullet i}T_{j\bullet})_{ji} = S_{ji}T_{ji}$$

für alle Kombinationen von Indizes $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, m]\!]$ sein, also ist jeder Eintrag von S und T ungleich 0.

Für jede Kombination von Indizes $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, m]\!]$ und ein weiteres Indexpaar $(l, k) \neq (j, i)$ ist allerdings

$$0 = (E_{ji})_{lk} = (S_{\bullet i}T_{j\bullet})_{lk} = S_{li}T_{jk},$$

was einen Widerspruch ergibt.

Übungsaufgabe I-10.5. (Ring quadratischer Matrizen)

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Weiterhin sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Matrixprodukt von n beliebigen strikten oberen Dreiecksmatrizen aus dem $K^{n \times n}$ die Nullmatrix ergibt. Zeigen Sie weiter, dass das Lemma 15.36 impliziert, also dass $A^n = 0$ für jede strikte obere Dreiecksmatrix $A \in K^{n \times n}$ gilt.

(b) Entscheiden Sie, ob die Ringe der Mengen $K^{n \times n}_{\diagdown}$, $K^{n \times n}_{\text{◹}}$ und $K^{n \times n}_{\text{◺}}$ mit der Matrixaddition und -multiplikation kommutativ sind. Falls ja, kommutieren die jeweiligen Matrizen auch mit allen Matrizen aus $K^{n \times n}$?

Lösung.

(a) Wie man in Beispiel 15.37 des Skripts schön sehen kann, sorgt das Erhöhen der Potenz einer strikten oberen Dreiecksmatrix dafür, dass mindestens eine weitere Nebendiagonale nur mit Nullen besetzt ist – die Nicht-Null Einträge der Matrix wandern bei Erhöhen der Potenz nach rechts oben. Dieser Effekt ist unabhängig davon, dass in dem Beispiel die Potenzen einer strikten oberen Dreiecksmatrix gebildet werden, er tritt auch bei allgemeinen Produkten auf.

Genauer zeigen wir Folgendes: Es seien A und B aus $K^{n \times n}$ strikte obere Dreiecksmatrizen und $k_A, k_B \in [\![0, n-1]\!]$ Zahlen, so dass die k-ten Nebendiagonalen von A bzw. B für $k \in [\![0, k_A]\!]$ bzw. $k \in [\![0, k_B]\!]$ nur aus Nullen besteht. Dann bestehen die k-ten Nebendiagonalen des Produkts $A\,B$ für $k \in [\![0, k_A + k_B + 1]\!]$ nur aus Nullen.

Die Behauptung folgt schnell aus der Definition des Matrixprodukt, denn nach Voraussetztung sind

$$a_{ij} = 0 \text{ für } j - i \leqslant k_A \quad \text{und} \quad b_{ij} = 0 \text{ für } j - i \leqslant k_B$$

und somit

$$(ab)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{a_{i\ell}}_{\substack{=0 \\ \text{für } \ell \leqslant i+k_A}} \underbrace{b_{\ell j}}_{\substack{=0 \\ \text{für } \ell \geqslant j-k_B}} = \sum_{\ell=i+k_A+1}^{j-k_B-1} a_{i\ell} b_{\ell j}$$

und die Indexmenge der Summe ist leer, wenn $j - i \leqslant k_B + k_A + 1$.

Die Anzahl der führenden, nichtnegativen Nulldiagonalen summiert sich also und wird um 1 verringert. Entsprechend ist klar, dass das Produkt aus n strikten oberen Dreiecksmatrizen die Nullmatrix ergibt. Die n-te Potenz A^n einer solchen Matrix ist genau ein solches Produkt.

Der Beweis ist am einfachsten mit der komponentenweise Definition des Matrixprodukts zu führen. Eine Intuition, was hier passiert findet man mit der spaltenweisen Interpretation jedoch leichter. Das Produkt $A\,B$ erhält erstmal k_B Nullspalten aus der Struktur von B, dann weitere k_A Nullspalten aus der Struktur von A und dem Fakt, dass die Spalten $k_A + k_B$ nur die ersten k_A Spalten von A kombinieren. Anschließend ist jede Spalte eins weiter rechts eine Kombination aus Spalten von A, die einen Eintrag höchstens eins weiter unten haben kann.

Dass Fälle auftreten können, wo wirklich die n-te Potenz benötigt wird, zeigt schon Beispiel 15.37 des Skripts. Andersherum können durchaus auch Fälle auftreten, in denen A eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, in der lediglich die Hauptdiagonale ausschließlich aus Nullen besteht, und für die schon $A^2 = 0$ gilt, z. B. Matrizen der Struktur

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$ abzulesen, so dass $A^k = 0$ ist, ist also keinesfalls offensichtlich.

(b) Im Fall $n = 1$ stimmen alle drei Unterräume überein und sind isomorph zum Körper, kommutieren also. Dass die Dreiecksmatrizen für andere $n \in \mathbb{N}$ nicht kommutieren zeigt schon das Beispiel im Beweis von Lemma 15.33. Die Diagonalmatrizen bilden für beliebige $n \in \mathbb{N}$ einen kommutativen Ring. Bei Multiplikation von rechts skaliert eine Diagonalmatrix die Spalten der linken Matrix mit ihren entsprechenden Hauptdiagonaleinträgen. Bei Multiplikation von links wird zeilenweise skaliert. Das liefert für allgemeine Matrizen nicht den gleichen Effekt, wie man am folgenden Beispiel sieht:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Für Diagonalmatrizen stimmt aber die j-te Spalte immer mit der j-ten Zeile überein, hier werden also die Hauptdiagonalen komponentenweise multipliziert.

Übungsaufgabe I-10.6. (Allgemeine lineare Gruppe)

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, K)$ genau dann endlich ist, wenn K endlich ist.

(b) Bestimmen Sie die von der Menge der Elementarmatrizen vom Typ I erzeugte Untergruppe in $\mathrm{GL}(n, K)$.

Lösung.

(a) Wenn K ein endlicher Körper ist, dann ist schon die Menge aller Matrizen $K^{n\times n}$ endlich mit $\#K^{(n^2)}$ Elementen, die Teilmenge $\mathrm{GL}(n,K)$ ist entsprechend ebenfalls endlich.

Ist K ein nicht endlicher Körper, dann ist für jedes $\alpha \in K$ die Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

invertierbar, also in der $\mathrm{GL}(n,K)$, welche damit mindestens so mächtig ist, wie der Körper selbst.

(b) Für

$$E = \{A \in \mathrm{GL}(n,K) \mid A \text{ ist Elementarmatrix vom Typ I}\}$$

ist

$$\langle E\rangle = \{A \in \mathrm{GL}(n,K) \mid A \text{ ist diagonal}\}.$$

Dass es sich hierbei um eine Untergruppe handelt liefert das Untergruppenkriterium, da Diagonalmatrizen genau dann invertierbar sind, wenn ihre Diagonale keine Null enthält, und dann in diesem Fall Elementweise auf der Diagonalen invertiert wird. Damit gilt

$$\langle E\rangle \subseteq \{A \in \mathrm{GL}(n,K) \mid A \text{ ist diagonal}\}$$

und die umgekehrte Inklusion folgt sofort, da eine invertierbare Diagonalmatrix A durch

$$\prod_{i=1}^{n} D_i(A_{ii})$$

erzeugt werden kann.

Hausaufgabe I-10.1 (Basics zu Matrizen) 1.5 + 0.5 + 2 + 1 + 2 = 7 Punkte

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A_0\colon [\![1,1]\!] \times [\![1,1]\!] \ni (i,j) \mapsto 15, \qquad A_1\colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 0, & i+j=2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_2\colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 2, & i=j+1 \\ 3, & |i-j|=2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_3\colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto i\cdot j-2$$

$$A_4\colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_5\colon [\![1,4]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto j$$

(a) Geben Sie die explizite, elementweise Form (15.1 aus dem Skript) der Matrizen an.

(b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen quadratisch, Diagonalmatrizen und Einheitsmatrizen sind.

(c) Geben Sie für jedes $k \in [\![0,5]\!]$ zu dem dazugehörigen A_k (wenn möglich) die k-te Spalte, k-te Zeile und die Einträge entlang der k-ten Diagonalen an.

(d) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ die Summe $A_k + A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Summen für die Fälle $k \neq l$.

(e) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ das Produkt $A_k\, A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Produkte für die Fälle $k \neq l$. **Hinweis:** Arbeiten Sie schon hier möglichst spalten- und zeilenweise.

Lösung.

(a) Um die „Tableau-Form" der Matrizen zu erhalten, wertet man einfach die gegebene Vorschrift an jedem benötigten Indexpaar aus. Dabei können bestimmte Indexkombinationen in Abhängigkeit von der Struktur der Vorschrift natürlich ausgelassen werden. Bei dem ersten Beispiel ist die Abbildung ja bspw. konstant, hier kann man also einfach die konstante Matrix mit Wert 15 der passenden Dimension hinschreiben.

Die Matrizen haben die Form

$$A_0 = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(1.5 Punkte)

(b) Quadratisch sind entsprechend die Matrizen $A_0 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und $A_1, A_3 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Diagonalmatrizen sind die Matrizen A_0 und A_4. (0.5 Punkte)

(c) k=0: Die 0-te Spalte und Zeile von A_0 existiert nicht. Es ist aber die Hauptdiagonale die 0-te Diagonale und in diesem Fall also lediglich $a_{11} = \begin{pmatrix}15\end{pmatrix}$.

k=1: Die Einträge entlang der ersten Diagonalen von A_1 sind gegeben als

$$(a_{12}, a_{23}, a_{34}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Die erste Spalte und Zeile von A_1 sind gegeben durch

$$[\![1,4]\!] \ni i \longrightarrow a_{i1} \quad \text{also} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$[\![1,4]\!] \ni j \longrightarrow a_{1j} \quad \text{also} \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

k=2: Die Einträge entlang der zweiten Diagonalen von A_2 sind gegeben als

$$(a_{33}, \dots, a_{35}) = \begin{pmatrix}3 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Die zweite Spalte und Zeile von A_2 ist gegeben durch

$$[\![1,3]\!] \ni i \longrightarrow a_{i2} \quad \text{also} \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$[\![1,6]\!] \ni j \longrightarrow a_{2j} \quad \text{also} \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

k=3: Die Einträge entlang der dritten Diagonalen von A_3 sind gegeben als

$$(a_{14}, \dots, a_{14}) = (2).$$

Die dritte Spalte und Zeile von A_3 ist gegeben durch

$$[\![1,4]\!] \ni i \longrightarrow a_{i3} \quad \text{also} \begin{pmatrix}1\\4\\7\\10\end{pmatrix}$$

$$[\![1,4]\!] \ni j \longrightarrow a_{3j} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

k=4: Die vierte Diagonale von A_4 ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die vierte Zeile existiert nicht, die vierte Spalte von A_4 ist gegeben durch

$$[\![1,3]\!] \ni i \longrightarrow a_{i4} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

k=5: Die Einträge entlang der fünften Diagonalen von A_5 sind gegeben als

$$(a_{16} \dots a_{16}) = (6).$$

Die fünfte Zeile existiert nicht, die fünfte Spalte von A_5 ist gegeben durch

$$[\![1,3]\!] \ni i \longrightarrow a_{i5} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(d) Matrizen können genau dann addiert werden, wenn sie die gleichen Dimensionen haben. Insbesondere kann die Summe jeder Matrix mit sich selbst gebildet werden. Außerdem ist die Matrixaddition kommutativ, jede mögliche Summe kann also auch mit vertauschten Indizes gebildet werden. Berechnet werden muss also

$$A_1 + A_3 = A_3 + A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A_2 + A_4 = A_4 + A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1 Punkt)

(e) Matrizen können genau dann multipliziert werden, wenn die innere Dimension übereinstimmt. Insbesondere können Matrizen genau dann mit sich selbst multipliziert werden, wenn sie quadratisch sind. Zusätzlich sind die folgenden Kombinationen möglich

$$A_1 A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 21 & 30 \\ 2 & 12 & 22 & 32 \\ 2 & 12 & 22 & 32 \\ 2 & 12 & 22 & 32 \end{bmatrix} \qquad (A_1 \text{ summiert Zeilen von } A_3 \text{ auf})$$

$$A_3\,A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \\ 21 & 22 & 22 & 22 \\ 30 & 32 & 32 & 32 \end{bmatrix} \qquad (A_1 \text{ summiert Spalten von } A_3 \text{ auf})$$

$$A_1\,A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \end{bmatrix} \qquad (A_5 \text{ summiert Spalten von } A_1 \text{ und skaliert sie})$$

$$A_3\,A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 12 & 24 & 36 & 48 & 60 & 72 \\ 22 & 44 & 66 & 88 & 110 & 132 \\ 32 & 64 & 96 & 128 & 160 & 192 \end{bmatrix} \qquad (A_5 \text{ summiert Spalten von } A_3 \text{ und skaliert sie})$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe I-10.2 (Mehr zu spalten-/zeilenweiser Matrixmultiplikation) 2 Punkte

Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ an, die für beliebige $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ beide folgenden Bedingungen erfüllt. Entscheiden und erklären Sie, ob die Matrix B eindeutig bestimmt ist.

- Die erste Spalte von $A\,B$ ist gegeben durch die Summe der ersten Spalte und der vierfachen letzten Spalte von A und die letzte Spalte von $A\,B$ ist gegeben durch ein vielfaches der Summe aller Spalten von A.
- Die zweite und dritte Zeile von $B\,A$ sind die Summe des zweifachen der zweiten Zeile von A und des (-3)-fachen der dritten Zeile von A.

Lösung.

Die gesuchte Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ist von der Gestalt

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

mit reellen Einträgen, die es zu bestimmen gilt. Die Informationen über die erste Spalte des Produkts $A\,B$ liefert schonmal

$$B = \begin{bmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 4 & ? & ? \end{bmatrix}$$

und die Informationen über die letzte Spalte liefert

$$B = \begin{bmatrix} 1 & ? & a \\ 0 & ? & a \\ 0 & ? & a \\ 4 & ? & a \end{bmatrix}$$

für ein $a \in \mathbb{R}$.

Mit den Informationen über die zweite und dritte Zeile von $B\,A$ erhalten wir analog

$$B = \begin{bmatrix} 1 & ? & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & ? & -3 \end{bmatrix}$$

und damit keine eindeutige Matrix, man kann die beiden verbleibenden Einträge beliebig in $\mathbb{R}$ wählen um Matrizen der gesuchten Form zu erhalten. (2 Punkte)

Hausaufgabe I-10.3 (Elementarmatrizen, Rang und Zeilenstufenform) 1.5 + 1 + 3.5 = 6 Punkte

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie zu jeder Elementarmatrix D, S, T vom Typ I-III eine entsprechende Elementarmatrix D', S', T' an, für die $D'\,D = S'\,S = T'\,T = I$ gilt, und zeigen Sie damit Lemma 15.43.

(b) Beschreiben Sie, was die Elementarmatrizen vom Typ I-III bei Multiplikation von rechts bewirken.

(c) Bestimmen Sie den Rang und eine Rangfaktorisierung der folgenden Matrizen:

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

(ii) $\begin{bmatrix} \bot & \top & \top \\ \top & \bot & \top \\ \top & \top & \bot \end{bmatrix} \in (\{\top, \bot\}, \mathrm{XOR}, \wedge)^{3\times 3}$

Lösung.

(a) Die Form der Matrizen ist offensichtlich, wenn man sich überlegt, wie die zeilenweise Modifikation, die durch die Multiplikation mit den Elementarmatrizen dargestellt wird, rückgängig macht.

Typ I: Für

$$D := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = I + (\alpha - 1)\, E_{ii} \quad \text{ist} \quad D' := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \frac{1}{\alpha} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) E_{ii}.$$

Typ II: Für

$$S := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = I + \alpha\, E_{ij} \quad \text{ist} \quad S' := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & -\alpha & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = I - \alpha\, E_{ij}$$

Für Matrizen T vom Typ III gilt $T' = T$.

Überprüfen lässt sich das schnell durch Matrixmultiplikation. (1.5 Punkte)

(b) Bei Multiplikation von Rechts modifizieren die Elementarmatrizen den jeweils anderen Faktor spaltenweise, statt zeilenweise, also Typ I skaliert spalten und Typ III tauscht Spalten. Aufpassen muss man lediglich mit den Matrizen vom Typ II, denn von Links multipliziert addiert $I + E_{ij}$ die j-te Zeile auf die i-te Zeile, von rechts multipliziert dreht sich aber die Reihenfolge, hier wird die i-te Spalte auf die j-te Spalte addiert. (1 Punkt)

(c) Die unten stehenden Lösungen habe alle die Struktur, dass wir mit der zu untersuchenden Matrix A starten, und eine Identität als $A = IA$ ergänzen. Zwischen der linken Matrix (anfangs I) und der rechten Matrix (anfangs A) ergänzen wir dann sukzessive Elementarmatrizen (und um Zeilen zu vertauschen Permutationsmatrizen) und ihre Umkehrung (ihre Inverse) und multiplizieren dann die rechte Elementarmatrix von links an die rechte Matrix und die linke Elementarmatrix von rechts an die linke Matrix.

(i) Es ist

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 0 & -12 & -6 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 3 & 1 \\ -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Entsprechend ist der Rang 2, wie man an der inneren Dimension der Rangfaktorisierung abliest. (2 Punkte)

(ii) Wir können analog zur ersten Teilaufgabe vorgehen, benötigen jetzt aber die entsprechenden Rechenoperationen in $(\{\top, \bot\}, \text{XOR}, \wedge)$, welcher isomorph zum $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ist. Wir erhalten

$$\begin{bmatrix} \bot & \top & \top \\ \top & \bot & \top \\ \top & \top & \bot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \top & \bot & \bot \\ \bot & \top & \bot \\ \bot & \bot & \top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bot & \top & \top \\ \top & \bot & \top \\ \top & \top & \bot \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \top & \bot & \bot \\ \bot & \top & \bot \\ \bot & \bot & \top \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bot & \bot & \top \\ \bot & \top & \bot \\ \top & \bot & \bot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bot & \bot & \top \\ \bot & \top & \bot \\ \top & \bot & \bot \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} \bot & \top & \top \\ \top & \bot & \top \\ \top & \top & \bot \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bot & \bot & \top \\ \bot & \top & \bot \\ \top & \bot & \bot \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \top & \bot & \bot \\ \top & \top & \bot \\ \bot & \bot & \top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \top & \bot & \bot \\ \top & \top & \bot \\ \bot & \bot & \top \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} \top & \top & \bot \\ \top & \bot & \top \\ \bot & \top & \top \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bot & \bot & \top \\ \bot & \top & \bot \\ \top & \bot & \bot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \top & \bot & \bot \\ \top & \top & \bot \\ \bot & \bot & \top \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \top & \bot & \bot \\ \bot & \top & \bot \\ \bot & \top & \top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \top & \bot & \bot \\ \bot & \top & \bot \\ \bot & \top & \top \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} \top & \top & \bot \\ \bot & \top & \top \\ \bot & \top & \top \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bot & \bot & \top \\ \bot & \top & \bot \\ \top & \bot & \bot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \top & \bot & \bot \\ \top & \top & \bot \\ \bot & \top & \top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \top & \top & \bot \\ \bot & \top & \top \\ \bot & \bot & \bot \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bot & \top & \top \\ \top & \top & \bot \\ \top & \bot & \bot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \top & \top & \bot \\ \bot & \top & \top \\ \bot & \bot & \bot \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bot & \top \\ \top & \top \\ \top & \bot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \top & \top & \bot \\ \bot & \top & \top \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

was schon die fertige Rangfaktorisierung ist, und der Rang ist 2. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-10.4 (Transposition und (Anti-)Symmetrie) 3.5 + 0.5 = 4 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn die Charakteristik $\operatorname{char}(K) \neq 2$ ist, dann sind $K^{n \times n}_{\text{sym}}$ und $K^{n \times n}_{\text{skew}}$ Unterräume von $K^{n \times n}$ der Dimensionen

$$
\begin{aligned}
\dim(K^{n \times n}_{\text{sym}}) &= \frac{1}{2} n \, (n+1) \\
\dim(K^{n \times n}_{\text{skew}}) &= \frac{1}{2} n \, (n-1),
\end{aligned}
$$

und es gilt

$$
K^{n \times n} = K^{n \times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n \times n}_{\text{skew}}
$$

(Lemma 15.32). Geben Sie dazu die eindeutige Zerlegung $A = A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}}$ für $A \in K^{n\times n}$ an.

(b) Wenn die Charakteristik $\operatorname{char}(K) = 2$ ist (z. B. $K = \mathbb{Z}_2$), dann ist $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$. Was ist die Dimension von $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$ in diesem Fall?

Lösung.

Wir zeigen als kurzes Hilfsresultat, dass genau dann $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt, wenn jedes Element von K selbstinvers ist. Die Rückrichtung dieser Aussage ist offensichtlich (denn das gilt ja dann auch für die 1, an Hand der die Charakteristik definiert ist). Für die Hinrichtung sei $a \in K$, dann ist wegen $a + a = a \cdot (1 + 1) = a \cdot 0 = 0$ auch $a = -a$. **Beachte:** In jedem Vektorraum gilt das gemischte Distributivitätsgsetz und damit, dass jeder Vektor die additive Ordnung der Charakteristik des Körpers hat und jeder Körper ist ein VR über sich selbst, daraus folgt das also auch.

(a) Offensichtlich liegt die Nullmatrix in beiden Mengen (sie ist sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch). Beide Mengen sind also nichtleer. Für $A, B \in K^{n\times n}_{\text{sym}}$ und $\alpha, \beta \in K$ ist außerdem auf Grund der komponentenweise Multiplikation und Addition

$$(\alpha A + \beta B)^\mathsf{T} = (\alpha A)^\mathsf{T} + (\beta B)^\mathsf{T} = \alpha A^\mathsf{T} + \beta B^\mathsf{T} = \alpha A + \beta B.$$

Weiterhin ist für $A, B \in K^{n\times n}_{\text{skew}}$ und $\alpha, \beta \in K$ wieder auf Grund der komponentenweise Multiplikation und Addition

$$(\alpha A + \beta B)^\mathsf{T} = (\alpha A)^\mathsf{T} + (\beta B)^\mathsf{T} = \alpha A^\mathsf{T} + \beta B^\mathsf{T} = -\alpha A - \beta B = -(\alpha A + \beta B).$$

Entsprechend sind beide Mengen abgeschlossen bzgl. der Vektorraumoperationen und somit, nach dem Unterraumkriterium, Unterräume. (0.5 Punkte)

Weiterhin gilt $K^{n\times n}_{\text{sym}} \cap K^{n\times n}_{\text{skew}} = \{0\}$, da die Charakteristik des Körpers eingeschränkt ist. Eine Matrix die sowohl symmetrisch, als auch antisymmetrisch ist besteht nämlich nur aus (additiv) selbstinversen Elementen. Für jeden Körper erfüllt die 0 diese Eigenschaft und wie oben gezeigt gibt es auf Grund der Charakteristikeinschränkung des Körpers kein weitere selbstinverses Element. (0.5 Punkte)

Um die Dimensionsaussage zu zeigen, zeigen wir lediglich, dass

$$\dim(K^{n\times n}_{\text{sym}}) = \frac{1}{2} n\,(n+1),$$

denn dann folgt auf Grund der Dimensionsformel in Satz 14.3 und der noch zu zeigenden Summeneigenschaft sofort, dass

$$n^2 = \dim_K(K^{n\times n}) = \dim_K(K^{n\times n}_{\text{sym}}) + \dim_K(K^{n\times n}_{\text{skew}}) + \dim_K(K^{n\times n}_{\text{sym}} \cap K^{n\times n}_{\text{skew}}) = \frac{1}{2} n\,(n+1) + \dim_K(K^{n\times n}_{\text{skew}}) + 0$$

und damit $\dim_K(K^{n\times n}_{\text{skew}}) = n^2 - \frac{1}{2}n\,(n+1) = \frac{1}{2}n\,(n-1)$. (0.5 Punkte)

Dafür zeigen wir, dass die Menge

$$B_{\text{sym}} \coloneqq \{E_{ii} \mid i \in [\![1,n]\!]\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j\}$$

eine Basis von $K^{n\times n}_{\text{sym}}$ ist. Das sind gerade die symmetrischen Matrizen, die entweder auf der Hauptdiagonalen eine 1 stehen haben, oder je eine 1 passend symmetrisch auf den Nebendiagonalen stehen haben, also Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Für die symmetrischen Matrizen bildet diese Menge so etwas wie die Standardbasis, denn jede symmetrische Matrix A lässt sich dann schreiben als

$$A = \sum_{i<j=1}^{n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii}$$

daher ist B_{sym} erzeugend, und die Kombination is offensichtlich eindeutig. Da es sich bei B_{sym} um eine Menge mit $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ Elementen handelt ist diese Dimension also klar. (1 Punkt)

Die Standardbasis B_{skew} von $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ ist in diesem Fall entsprechend natürlich durch

$$B_{\text{skew}} \coloneqq \{E_{ij} - E_{ji} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j\}$$

gegeben. Die antisymmetrischen Matrizen haben alle selbstinverse Elemente auf der Hauptdiagonalen, bei unserer eingeschränkten Charakteristik sind das also nur die Nullen, daher kann die Diagonale vernachlässigt werden. Insbesondere ist die Menge leer, wenn $n = 1$, denn dann handelt es sich bei $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ um den Nullvektorraum.

Es verbleibt der Nachweis, dass die beiden Unterräume tatsächlich komplementär sind, dafür fehlt noch, dass ihre Summe den ganzen Raum ergibt. Dafür würde es natürlich reichen, dass B_{skew} tatsächlich eine Basis von $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ ist, denn dann ergibt sich die Eigenschaft aus der Vereinigung der Basen mit ihren entsprechenden Kardinalitäten und der Trivialschnitteigenschaft. Es ist aber durchaus interessant, sich zu fragen, wie man eine Matrix in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt. Für ein $A \in K^{n\times n}$ findet man die Zerlegung zum Beispiel gerade durch die Form der beiden Standardbasen, denn die Darstellung einer Matrix A in der Vereinigung beider Basen liefert das

Gleichungssystem

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} E_{ii} + \sum_{i<j=1}^{n} \alpha_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + \beta_{ij}(E_{ij} - E_{ji})$$

für die entsprechenden Koeffizienten α_{ij}, β_{ij}. Komponentenweise liefert das dann das System

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} + \beta_{ij} &= a_{ij} \\ \alpha_{ij} - \beta_{ij} &= a_{ji} \end{aligned}$$

für $i < j$ und damit (summieren und subtrahieren der Zeilen) die Lösungen

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \\ \beta_{ij} &= \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \end{aligned}$$

woran man die Zerlegung

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^\top)}_{\in K^{n\times n}_{\text{sym}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^\top)}_{\in K^{n\times n}_{\text{skew}}}$$

sofort erkennt, ohne sich mit den komponentenweisen Gleichungen auf der Diagonalen genauer befassen zu müssen. **Beachte:** Wir arbeiten hier in einem Körper der Charakteristik ungleich 2. Das Element $2 \in K$ ist also Kurzschreibweise für das Element $1 + 1$, das auf Grund der Charakteristikeinschränkung nicht 0 ist, und damit invertierbar mit dem inversen Element $\frac{1}{2}$ (ebenfalls in Kurzschreibweise für $\frac{1}{1+1}$). (1 Punkt)

(b) Wenn $\operatorname{char}(K) = 2$ ist, dann ist wie oben ausgeführt jedes Element selbstinvers, daraus folgt sofort $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$. Die Dimension bleibt weiterhin $\frac{1}{2}n\,(n + 1)$, denn die Basis von oben kann unverändert weiterverwendet werden. Hier gilt dann offensichtlich nicht mehr, dass antisymmetrische Matrizen nur Nullen auf der Diagonalen haben dürfen. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe I-10.5 (Ring quadratischer Matrizen) 1 + 1 + 1 = 3 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

(a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Folgerung 15.46, also dass für beliebige Matrizen $A \in K^{n\times m}$ und invertierbare Matrizen $B \in K^{n\times n}$, $C \in K^{m\times m}$ die Gleichheit

$$\operatorname{Rang}(B\,A\,C) = \operatorname{Rang}(A) \tag{15.36}$$

gilt.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob $K^{n\times n} \ni A \mapsto A^\intercal \in K^{n\times n}$ ein Ringautomorphimus von Ringen mit Eins ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass die einzigen Ideale im Ring $K^{n\times n}$ die trivialen sind. Dennoch ist im allgemeinen $K^{n\times n}$ kein Körper. Weshalb ist das kein Widerspruch zu Hausaufgabe I-7.4 Teilaufgabe (c)?

Lösung.

(a) Wir nutzen Satz 15.17. Da invertierbare Matrizen Vollrang haben, gilt

$$\operatorname{Rang}(B\,A\,C) \leqslant \min\{\operatorname{Rang}(B),\ \operatorname{Rang}(A),\ \operatorname{Rang}(C)\} \leqslant \operatorname{Rang}(A)$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\operatorname{Rang}(A) &= \operatorname{Rang}((B^{-1}B)\,A\,(C\,C^{-1})) = \operatorname{Rang}(B^{-1}(B\,A\,C)\,C^{-1}) \\ &\leqslant \min\{\operatorname{Rang}(B^{-1}),\ \operatorname{Rang}(B\,A\,C),\ \operatorname{Rang}(C^{-1})\} \leqslant \operatorname{Rang}(B\,A\,C).\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b) Die Einheitsmatrix ist diagonal, daher gilt $I^\intercal = I$. Außerdem gilt für Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$, dass

$$(A + B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal.$$

Die Matrixmultiplikation ist mit der Transposition aber i. A. bekanntermaßen nicht verträglich, denn es gilt

$$(A\,B)^\intercal = B^\intercal\,A^\intercal \overset{\text{i. A.}}{\neq} A^\intercal\,B^\intercal$$

wie man für $A = E_{11}$ und $B = E_{12}$ sofort einsieht. Ein Sonderfall ist also lediglich der Fall $n = 1$, wo diese Matrizen nicht existieren, hier handelt es sich tatsächlich um einen Ringhomomorphismus. Die Bijektivität der Abbildung liegt dimensionsunabhängig auf der Hand, da $A^\intercal$ aus den gleichen Einträgen besteht, wie A. (1 Punkt)

(c) Wir zeigen, dass jedes Ideal, welches ein nicht-Null Element enthält, bereits den ganzen Ring enthält. Es sei dafür ein Ideal $I \neq \{0\}$ und ein $A \in I \setminus \{0\}$ gegeben. Dann existieren also Indizes $i, j \in [\![1, n]\!]$, so dass $a_{ij} \neq 0$. Da I ein Ideal ist, muss für beliebige $\alpha \in K$, beliebige Indizes $k, l \in [\![1, n]\!]$ und die Standardmatrizen $E_{ki}, E_{lj} \in K^{n\times n}$ auch

$$(\frac{\alpha}{a_{ij}}E_{ki})\,A\,E_{lj} = \alpha E_{kl},$$

und damit jede beliebig skalierte Standardmatrix im Ideal enthalten sein. Das dieses Ideal insbesondere abgeschlossen unter Addition ist, liegt ein beliebiges $B \in K^{n \times n}$ wegen

$$B = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} E_{ij}$$

im Ideal. (1 Punkt)

Hausaufgabe I-10.6 (Allgemeine lineare Gruppe) 2 + 3 = 5 Punkte

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$P \coloneqq \{A \in K^{n \times n} \mid \text{In jeder Zeile und jeder Spalte von } A \text{ steht genau eine 1 und sonst } 0\} \subseteq \mathrm{GL}(n, K).$$

(i) Zeigen Sie, dass P mit der Matrixmultiplikation eine zur $(S_n, \circ)$ isomorphe Gruppe bildet.

(ii) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = A^\intercal$ für alle $A \in P$.

(iii) Bestimmen Sie eine Zerlegung der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in das Produkt von Elementarmatrizen vom Typ III.

(b) (i) Bestimmen Sie alle Elemente der $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

Hinweis: Überführen Sie ein allgemeines $A \in \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ in Zeilenstufenform und unterscheiden Sie geeignete Fälle.

(ii) Bestimmen Sie die Ordnung für alle Elemente aus $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ nicht kommutativ ist.

Lösung.

(a) **Beachte:** Die Multiplikation mit Matrizen der vorliegenden Form von rechts bzw. links vertauscht in dem anderen Faktor Spalten bzw. Zeilen, sie permutieren also die Indexmengen der Spalten und Zeilen, sie werden daher Permutationsmatrizen genannt.

Eine Permutation $f \in S_n$ der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ f(1) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

können wir mit der Matrix $\Phi(f)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = f(j) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

aus P identifizieren. Die 1-Einträge sind also genau die $a_{f(j),j}$ für $j \in [\![1, n]\!]$. Die Matrix A ist also spaltenweise aus Einheitsvektoren durch $A = (e_{f(1)}, \dots, e_{f(n)})$ aufgebaut.

Die Bijektivität dieser Abbildung ist offensichtlich, und lässt sich an Hand der Umkehrabbildung leicht verifizieren. Eine Matrix $A \in P$ besitzt zu jedem Index $j \in [\![1, n]\!]$ genau einen Index $\ell_j \in [\![1, n]\!]$ mit $a_{\ell_j j} = 1$, wobei die l_j paarweise verschieden sein müssen. Zu $A \in P$ gehört also die Permutation

$$\Phi^{-1}(A) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}.$$

Es seien nun Permutationen $f, g \in S_n$ gegeben. Aus der spaltenweise Interpretation der Matrixmultiplikation folgt sofort, dass für alle Spaltenindizes $j \in [\![1, n]\!]$ gilt

$$(\Phi(f)\,\Phi(g))_{\bullet j} = \Phi(f)_{\bullet g(j)}$$

also hat $\Phi(f)\,\Phi(g)$ in der j-ten Spalte genau am Zeilenindex $f(g(j))$ eine 1, entspricht also $\Phi(f \circ g)$. Da die Mengen isomorph sind und die Abbildung strukturverträglich folgt sofort, dass auch P mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet. (1 Punkt)

Beachte: Es besteht grundsätzlich auch die Möglichkeit, die Permutationsmatrizen zeilenweise statt spaltenweise mit ihren Permutationen der S_n zu identifizieren. Dann muss man auf den Permutationsmatrizen die Multiplikation aber genau mit umgekehrter Reihenfolge der Matrizen definieren, sonst erhält man einen Antihomomorphismus. Die hier vorgestellte Variante ist auch attraktiv, weil der Urbildvektor in der Zweizeilenform der Permutation, also $(1, \dots, n)$ durch Multiplikation mit $\Phi(f)$ gerade auf den Bildvektor, also $(f(1), \dots, f(n))$ abgebildet wird.

Wir wissen nun, dass Gruppenhomomorphismen mit Inversenbildung verträglich sind, und dass Transpositionen in der S_n selbstinvers sind, was entsprechend auch in P gilt. Die Permutationen der S_n besitzen Zerlegungen in Transpositionen, für A mit einer Zerlegung der Permutation $\Phi^{-1}(A) = \tau_1 \circ \dots, \tau_k$, erhalten wir also, dass

$$A^{-1} = \Phi(\Phi^{-1}(A^{-1})) = \Phi(\Phi^{-1}(A)^{-1}) = \Phi((\tau_1 \circ \dots, \tau_k)^{-1}) = \Phi(\tau_k) \cdot \dots \cdot \Phi(\tau_1)$$

$$= \Phi(\tau_k)^\intercal \cdot \dots \cdot \Phi(\tau_1)^\intercal = (\Phi(\tau_1) \cdot \dots \cdot \Phi(\tau_k))^\intercal = \Phi(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k)^\intercal = A^\intercal.$$

(0.5 Punkte)

Um für die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eine Zerlegung in Transpositionsmatrizen (Elementarmatrizen vom Typ III) – das sind natürlich genau die zu den Transpositionspermutationen der S_n gehörigen Bilder unter Φ – zu bestimmen, haben wir nun vier Möglichkeiten. Entweder arbeiten wir mit der Matrix selbst oder mit der dazugehörigen Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Arbeiten wir mit der Matrix, dann bestimmen wir die Transpositionsmatrizen (bzw. deren Inverse, alle sind selbstinvers), die wir benötigen, um durch Multiplikation von rechts bzw. links, sukzessive Spalten bzw. Zeilen zu tauschen, so dass die Einheitsmatrix entsteht. Arbeiten wir mit der Permutation, dann bestimmen wir wie in Übungsaufgabe I-5.3 eine Zerlegung durch Tauschen im Urbild- oder Bildbereich der Permutation und bilden die gefundene Zerlegung auf Matrizen ab, was dann spaltenweisen bzw. zeilenweisen Vorgehensweise bei der Matrix entspricht.

Wir geben hier die beiden Varianten für das arbeiten mit der Matrix an, weil die Lösung im Rahmen der S_n sehr analog zu Übungsaufgabe I-5.3 geht. Wir notieren dabei die Transpositionsmatrizen, die die i-te und j-te Spalte bzw. Zeile tauscht mit T_{ij}. Einmal erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= T_{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= T_{12} T_{24} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T_{12}T_{24}T_{34}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= T_{12}T_{24}T_{34}T_{45}.
\end{aligned}
$$

Alternativ erhalten wir bei Bearbeitung der Spalten (von rechts)

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_{13} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_{23}T_{13} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_{34}T_{23}T_{13} \\
&= T_{45}T_{34}T_{23}T_{13}.
\end{aligned}
$$

Und wieder sehen wir, dass die Zerlegungen in Transpositionen nicht eindeutig sind. (0.5 Punkte)

(b) (i) Eine Matrix

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}
$$

ist genau dann invertierbar, wenn sie Vollrang 2 hat. Entsprechend können a und c nicht gleichzeitig 0 sein. Es ergeben sich also die folgenden Möglichkeiten.

Fall 1: $a = 0$ und $c \neq 0$, also $c = 1$. Dann ergibt sich nach erneuter Anwendung des Vollrangarguments auf die Zeilen der Matrix, dass b nicht Null sein darf, also $b = 1$ sein muss. Hier ergeben sich die Matrizen

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Fall 2: Für $a = 1$ und $c = 0$ erhalten wir analog die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fall 3: Für $a = c = 1$ dürfen nun b und d nicht übereinstimmen, da die Zeilen sonst linear abhängig sind und damit der Rang $1 < 2$ ist. Es ergeben sich

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1.5 Punkte)

(ii) Wir wissen bereits jetzt aus dem Satz von Lagrange, dass die Ordnungen der Matrizen Teiler von 6 sein müssen, also nur die Ordnungen 1, 2, 3, 6 auftreten können. Ordnung 6 kann nur dann auftreten, wenn die Gruppe zyklisch erzeugt ist. Es ergeben sich:

Ordnung 1: Natürlich nur die Einheitsmatrix (das neutrale Element)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ordnung 2: Alle selbstinversen Elemente, also schonmal die (einzige) Transpositionsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Außerdem die beiden oberen und unteren Dreiecksmatrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2$$

Ordnung 3: Hierunter fallen die verbleibenden Antidiagonalmatrizen, denn

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3.$$

(1 Punkt)

(iii) Hier kann man sehen, dass sogar die invertierbaren Matrizen im Allgemeinen nicht miteinander kommutieren. Ein einfaches Beispiel findet man, wenn man nutzt, dass die Transpositionsmatrizen von links bzw. rechts die Zeilen bzw. die Spalten vertauschen, was i. A. nicht die gleiche Transformation des anderen Faktors ist. Es ist z. B.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(0.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.