R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 9

Ausgabedatum: 8. Dezember 2025
Abgabedatum: 15. Dezember 2025

Übungsaufgabe I-9.1. (Basen)

(a) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus Übungsaufgabe I-8.5 (a) Basismengen der jeweiligen Vektorräume sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

(b) Bestimmen Sie Basen folgender (Unter-)vektorräume:

(i) $\{a+b\,i \in \mathbb{C} \mid a-2\,b = 0\}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der Addition und (skalaren) Multiplikation in $\mathbb{C}$.

(ii) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq 2\mathbb{N},\ A \text{ endlich}\}$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ mit $\triangle$ als Addition.

(c) Geben Sie einen *konstruktiven* Beweis für die Aussage in Folgerung 13.6 im Fall endlich erzeugter Vektorräume an, also dass jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis besitzt.

Übungsaufgabe I-9.2. (Erzeugung und Dimension)

Es sei V ein K-Vektorraum mit Basismenge B. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese war oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidungen kurz.

(a) Ist V von einer unendlichen Menge erzeugt, dann ist V unendlich-dimensional.

(b) Jeder Unterraum von V wird von einer Teilmenge von B erzeugt.

(c) Jeder Unterraum von V hat höchstens die Dimension von V.

(d) Sind U, W zwei Unterräume von V mit trivialem Schnitt und Basismengen B_U, B_W, dann gilt $B_U \cap B_W = \emptyset$.

(e) Ist V unendlichdimensional, dann existiert eine Familie $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ echt geschachtelter unendlichdimensionaler echter Unterräume von V.

(f) Ist V endlich, dann ist V endlich-dimensional.

(g) Ist V unendlich, dann ist V unendlich-dimensional.

(h) Ist L ein echter Unterkörper von K, dann ist $\dim_L(V) > \dim_K(V)$ oder beide Dimensionen sind unendlich.

Übungsaufgabe I-9.3. (Summen von Unterräumen)

(a) Zeigen Sie, dass die Kodimension in Definition 14.9 wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des komplementären Unterraums.

(b) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Zeigen Sie Satz 14.17 des Skripts, also die folgenden Aussagen:

(i) Ist B eine Basismenge von V und bilden die Mengen B_i, $i \in I$, eine disjunkte Zerlegung von B in Teilmengen mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i\in I} \langle B_i \rangle$.

(ii) Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basismengen B_i, $i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i\in I} B_i$ eine Basismenge von V.

Hausaufgabe I-9.1 (Basen) 1 + 2 + 3 + 2 = 8 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $\big((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -1, -1)\big)$ eine Basis des $(\mathbb{R}_3, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist.

(b) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus Hausaufgabe I-8.5 (a) Basismengen der jeweiligen Vektorräume sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

(c) Bestimmen Sie Basen folgender (Unter-)vektorräume:

  (i) $\{f \in \mathbb{R}^{[\![1,n]\!]} \mid \sum_{i=1}^{n} f(i) = 0\}$ für $n \in \mathbb{N}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der punktweisen Addition und (skalaren) Multiplikation.

  (ii) $\langle \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \#A \in A\} \rangle$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ mit $\triangle$ als Addition.

(d) Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $V \coloneqq \bigtimes_{j=1}^{n} V_j$ der Produktraum der K-Vektorräume $V_1, \dots, V_n$. Zeigen Sie Lemma 13.10, also dass wenn B_j eine Basismenge von V_j für $j = 1, \dots, n$ ist, dann ist

$$B \coloneqq \bigcup_{j=1}^{n} \{(0, \dots, 0, \underbrace{v}_{\text{Position } j \text{ im Tupel}}, 0, \dots, 0) \mid v \in B_j\}$$

eine Basismenge von V.

Hausaufgabe I-9.2 (Dimension) 5 + 3 = 8 Punkte

(a) Wie in Hausaufgabe I-8.3 sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den punktweisen Verknüpfungen sowie

$$\begin{aligned} U &\coloneqq \left\{f \in K^X \,\middle|\, f(x_0) = 0\right\}, \\ W &\coloneqq \left\{f \in K^X \,\middle|\, f(x) = f(y)\ \forall x, y \in X\right\}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

  (i) Zeigen Sie, dass $\dim_K(K^X) = \#X$, falls X endlich ist, und andernfalls $\dim_K(K^X) = \infty$.

  (ii) Bestimmen Sie $\dim_K(U)$, $\dim_K(W)$ und $\dim_K(U \cap W)$.

(b) Es sei $(K, +_K, \cdot_K)$ ein *endlicher* Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V genau dann K-endlichdimensional ist, wenn V endlich ist, und dass dann $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$ gilt.

Hausaufgabe I-9.3 (Summen von Unterräumen) 1.5 + 2.5 = 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass U und W in Hausaufgabe I-9.2 (0.1) komplementär in $(K^X, +, \cdot)$ sind.

(b) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V. Zeigen Sie Satz 14.16 des Skripts, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

(ii) Für alle $v \in V$ existiert eine endliche Teilfamilie $I_0 \subseteq I$ und Vektoren $u_i \in U_i$, sodass $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ gilt, und diese Darstellung ist (bis auf Summanden von Nullvektoren) eindeutig.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.