

ÜBUNG I - 9

Ausgabedatum: 8. Dezember 2025

Abgabedatum: 15. Dezember 2025

Übungsaufgabe I-9.1. (Basen)

- (a) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus [Übungsaufgabe I-8.5 \(a\)](#) Basismengen der jeweiligen Vektorräume sind und beweisen Sie Ihre Antworten.
- (b) Bestimmen Sie Basen folgender (Unter-)vektorräume:
 - (i) $\{a+bi \in \mathbb{C} \mid a-2b=0\}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der Addition und (skalaren) Multiplikation in $\mathbb{C}$.
 - (ii) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq 2\mathbb{N}, A \text{ endlich}\}$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ mit Δ als Addition.
- (c) Geben Sie einen *konstruktiven* Beweis für die Aussage in [Folgerung 13.6](#) im Fall endlich erzeugter Vektorräume an, also dass jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis besitzt.

Übungsaufgabe I-9.2. (Erzeugung und Dimension)

Es sei V ein K -Vektorraum mit Basismenge B . Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidungen kurz.

- (a) Ist V von einer unendlichen Menge erzeugt, dann ist V unendlich-dimensional.
- (b) Jeder Unterraum von V wird von einer Teilmenge von B erzeugt.
- (c) Jeder Unterraum von V hat höchstens die Dimension von V .
- (d) Sind U, W zwei Unterräume von V mit trivialem Schnitt und Basismengen B_U, B_W , dann gilt $B_U \cap B_W = \emptyset$.
- (e) Ist V unendlichdimensional, dann existiert eine Familie $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ echt geschachtelter unendlichdimensionaler echter Unterräume von V .
- (f) Ist V endlich, dann ist V endlich-dimensional.
- (g) Ist V unendlich, dann ist V unendlich-dimensional.

- (h) Ist L ein echter Unterkörper von K , dann ist $\dim_L(V) > \dim_K(V)$ oder beide Dimensionen sind unendlich.

Übungsaufgabe I-9.3. (Summen von Unterräumen)

- (a) Zeigen Sie, dass die Kodimension in [Definition 14.9](#) wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des komplementären Unterraums.
- (b) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Zeigen Sie [Satz 14.17](#) des Skripts, also die folgenden Aussagen:
- (i) Ist B eine Basismenge von V und bilden die Mengen $B_i, i \in I$, eine disjunkte Zerlegung von B in Teilmengen mit nichtleerer Indexmenge I , dann gilt $V = \bigoplus_{i \in I} \langle B_i \rangle$.
 - (ii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basismengen $B_i, i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Basismenge von V .

Hausaufgabe I-9.1 (Basen)

1 + 2 + 3 + 2 = 8 Punkte

- (a) Zeigen Sie, dass $((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -1, -1))$ eine Basis des $(\mathbb{R}_3, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist.
- (b) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus [Hausaufgabe I-8.5 \(a\)](#) Basismengen der jeweiligen Vektorräume sind und beweisen Sie Ihre Antworten.
- (c) Bestimmen Sie Basen folgender (Unter-)vektorräume:
- (i) $\{f \in \mathbb{R}^{\llbracket 1, n \rrbracket} \mid \sum_{i=1}^n f(i) = 0\}$ für $n \in \mathbb{N}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der punktweisen Addition und (skalaren) Multiplikation.
 - (ii) $\langle \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \#A \in A\} \rangle$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ mit Δ als Addition.
- (d) Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $V := \times_{j=1}^n V_j$ der Produktraum der K -Vektorräume $V_1, \dots, V_n$. Zeigen Sie [Lemma 13.10](#), also dass wenn B_j eine Basismenge von V_j für $j = 1, \dots, n$ ist, dann ist

$$B := \bigcup_{j=1}^n \{(0, \dots, 0, \underbrace{v}_{\text{Position } j \text{ im Tupel}}, 0, \dots, 0) \mid v \in B_j\}$$

eine Basismenge von V .

Hausaufgabe I-9.2 (Dimension)

5 + 3 = 8 Punkte

- (a) Wie in [Hausaufgabe I-8.3](#) sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den punktweisen Verknüpfungen sowie

$$\begin{aligned} U &:= \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0\}, \\ W &:= \{f \in K^X \mid f(x) = f(y) \ \forall x, y \in X\}. \end{aligned} \tag{o.1}$$

- (i) Zeigen Sie, dass $\dim_K(K^X) = \#X$, falls X endlich ist, und andernfalls $\dim_K(K^X) = \infty$.
 - (ii) Bestimmen Sie $\dim_K(U)$, $\dim_K(W)$ und $\dim_K(U \cap W)$.
- (b) Es sei $(K, +_K, \cdot_K)$ ein *endlicher* Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K -Vektorraum. Zeigen Sie, dass V genau dann K -endlichdimensional ist, wenn V endlich ist, und dass dann $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$ gilt.

Hausaufgabe I-9.3 (Summen von Unterräumen)

1.5 + 2.5 = 4 Punkte

- (a) Zeigen Sie, dass U und W in [Hausaufgabe I-9.2 \(o.1\)](#) komplementär in $(K^X, +, \cdot)$ sind.
- (b) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V . Zeigen Sie [Satz 14.16](#) des Skripts, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.
- (ii) Für alle $v \in V$ existiert eine endliche Teilfamilie $I_0 \subseteq I$ und Vektoren $u_i \in U_i$, sodass $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ gilt, und diese Darstellung ist (bis auf Summanden von Nullvektoren) eindeutig.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf [Mampf](#) ein.