Übung I - 8

Ausgabedatum: 1. Dezember 2025
Abgabedatum: 8. Dezember 2025

Übungsaufgabe I-8.1. (Vektorräume)

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Vektorräume über dem üblichen Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

   (i) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y \coloneqq \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ und $\alpha \odot x \coloneqq \sqrt[3]{\alpha} \cdot x$

   (ii) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y \coloneqq x + y - i$ und $\alpha \odot x \coloneqq \alpha \cdot (x - i) + i$

   (iii) $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle, \odot)$ mit $\alpha \odot A \coloneqq \{\alpha \cdot x \mid x \in A\}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie, in welchen Fällen Sie die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$ mit einer S-Multiplikation zu einem Vektorraum ergänzen können und welche Körper Sie dafür verwenden können.

Übungsaufgabe I-8.2. (Linearkombinationen)

Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der übliche Körper der reellen Zahlen.

(a) Gegeben sei der Vektorraum der reellen Folgen $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \odot)$ über $\mathbb{R}$ aus Beispiel 11.3. Berechnen Sie die Linearkombination der Vektoren $v_1 = (1, 0, 1, 0, \dots)$, $v_2 = (1, 1, -2, 0, \dots)$ und $v_3 = (3, 2, -3, 0, \dots)$ zu den Koeffizienten $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = -1$. Zeigen Sie weiterhin, dass v_3 eine Linearkombination von v_1 und v_2 ist.

(b) Gegeben sei der Vektorraum $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ über sich selbst. Entscheiden Sie, ob $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine Linearkombination der Familie von Vektoren $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist. Falls ja, bestimmen Sie passende Koeffizienten einer Linearkombination.

Übungsaufgabe I-8.3. (Unterräume)

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $(K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ einen Untervektorraum bilden.

(i) $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0\}$
(ii) $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_i = 0 \; \forall i \geqslant 17\}$
(iii) $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_1 \neq 0\} \cup \{0\}$
(iv) $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_n = nx \text{ für ein } x \in K\}$

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_1, +, \cdot)$ sowie $(U_2, +, \cdot)$ Unterräume. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V :\Leftrightarrow (U \text{ ist Unterraum von } V)$ eine Ordnungsrelation auf der Klasse aller Vektorräume definiert.

Übungsaufgabe I-8.4. (Erzeugung in Vektorräumen)

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Dann sind $(\mathcal{P}(V), \subseteq)$ und $(\{U \in \mathcal{P}(V) \mid U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V\}, \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq})$ partiell geordnete Mengen. Zeigen Sie, dass die Hüllenbildung $\langle \cdot \rangle \colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ ein **Ordnungshomomorphismus** ist, also dass für $E, F \in \mathcal{P}(V)$ gilt:

$$E \subseteq F \;\Rightarrow\; \langle E \rangle \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} \langle F \rangle$$

Übungsaufgabe I-8.5. (Lineare (Un-)abhängigkeit)

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen E von Vektoren in einem Vektorraum linear (un-)abhängig sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

  (*i*) $E \coloneqq \{(1,2,3), (3,2,1), (1,1,1)\}$ in $(\mathbb{R}_3, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

  (*ii*) $E \coloneqq \{1, 1, 2\}$ in $(\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}, +_3, \cdot_3)$ über sich selbst.

  (*iii*) $E \coloneqq \{\{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Es seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ Vektorräume über einem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$, $E \subseteq V$ sowie $F \subseteq W$ und $V \times W$ der Vektorraum mit den komponentenweisen Verknüpfungen aus Hausaufgabe I-8.1 . Was können Sie i. A. über die lineare (Un-)abhängigkeit der Menge $E \times F$ in $V \times W$ in den folgenden Fällen aussagen?

  (*i*) E ist linear unabhängig in V und F ist linear unabhängig in W.

  (*ii*) E ist linear abhängig in V und F ist linear unabhängig in W.

  (*iii*) E ist linear abhängig in V und F ist linear abhängig in W.

Hausaufgabe I-8.1 (Vektorräume) 2 + 1.5 + 1.5 = 5 Punkte

(a) Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der übliche Körper der reellen Zahlen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

   (i) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y \coloneqq \sqrt[2]{x^2 + y^2}$ und $\alpha \odot x \coloneqq \sqrt[2]{\alpha} \cdot x$

   (ii) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$, wobei $\oplus$ die übliche Addition in $\mathbb{C}$ ist und $\alpha \odot x \coloneqq \alpha \cdot \overline{x}$

   (iii) $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y \coloneqq x \cdot y$ und $\alpha \odot x \coloneqq x^\alpha$

(b) Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ die bereits bekannte abelsche Gruppe. Geben Sie eine skalare Multiplikation an, so dass $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ mit dieser S-Multiplikation ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ergibt.

(c) Es seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ Vektorräume über einem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$. Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon (V \times W)^2 &\to (V \times W) & (v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) &\coloneqq (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w}) \\ \cdot\colon K \times (V \times W) &\to (V \times W) & \alpha \cdot (v, w) &\coloneqq (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w) \end{aligned}$$

ein Vektorraum über K ist.

Hausaufgabe I-8.2 (Linearkombinationen) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

(a) Es sei $(\mathbb{R}_n, \oplus, \odot)$ als Vektorraum über dem üblichen Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen aus Beispiel 11.3 gegeben. Bestimmen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ der Vektor $v \coloneqq (-7, r, 2)$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1 \coloneqq (1, 2, 4)$, $v_2 \coloneqq (-2, 1, 2)$ und $v_3 \coloneqq (3, 1, 2)$ ist, und bestimmen Sie dann alle möglichen Koeffizienten aus Linearkombinationen von v_1, v_2, v_3, die v ergeben.

(b) Gegeben sei der Vektorraum $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \odot)$ mit der S-Multiplikation aus Hausaufgabe I-8.1 über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Bestimmen Sie alle Linearkombinationen der Vektoren

$$\{1, 2, 4, 8\}, \qquad \{1, 3, 9, 27\}, \qquad \{1, 4, 16, 64\},$$

die keine ungeraden Zahlen enthalten.

Hausaufgabe I-8.3 (Unterräume) 3.5 + 0.5 + 1 = 5 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle, \odot)$ der aus Hausaufgabe I-8.1 bekannte Vektorraum über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen einen Untervektorraum bilden.

   (i) $\{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\}$

   (ii) $\mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$ für $B \subseteq X$

   (iii) $\{\emptyset, X \setminus B\}$ für $B \subseteq X$

   (iv) $\{A \subseteq X \mid A \text{ und } X \text{ gleichmächtig}\} \cup \{\emptyset\}$

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_i, +, \cdot)_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen. Zeigen Sie Lemma 11.14 des Skripts, also dass dann auch $\bigcap_{i\in I} U_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterraum von $(V, +, \cdot)$ ist.

(c) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den punktweisen Verknüpfungen sowie

$$\begin{aligned} U &\coloneqq \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x_0) = 0 \right\}, \\ W &\coloneqq \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x) = f(y) \ \forall x, y \in X \right\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) U und W sind Unterräume von $(K^X, +, \cdot)$ (ii) $(U \cap W) = \{0\}$

Hausaufgabe I-8.4 (Erzeugung in Vektorräumen) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $E \subseteq V$. Zeigen Sie:

(i) $\langle E \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \forall i = 1, \ldots, n \ (v_i \in \langle E \rangle, \ \alpha_i \in K) \right\}.$

(ii) $\langle E \rangle = \bigcup \{ \langle E_0 \rangle \mid E_0 \subseteq E, E_0 \text{ endlich} \}.$

(b) Bestimmen Sie eine möglichst explizite Darstellung der folgenden erzeugten Unterräume.

(i) $\langle (1, 2) \rangle$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$

(ii) $\langle \{ \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \} \rangle$ in $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \odot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, siehe Hausaufgabe I-8.1

Hausaufgabe I-8.5 (Lineare (Un-)abhängigkeit) 2.5 + 0.5 + 1 = 4 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen E von Vektoren in einem Vektorraum linear (un-)abhängig sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

(i) $E \coloneqq \left\{ (1, 2, 3), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}), (1, 1, 1) \right\}$ in $(\mathbb{R}_3, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

(ii) $E \coloneqq \{ e_x \mid x \in X \} \cup \{1\}$ in $(K^X, +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ (siehe (12.3) des Skripts).

(iii) $E \coloneqq \{ X \setminus \{x\} \mid x \in X \}$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Zeigen Sie, dass in einer linear unabhängigen Familie von Vektoren kein Element doppelt vorkommen kann.

(c) Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie Lemma 12.5 des Skripts in der Mengenformulierung, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.

(ii) Es gibt einen Vektor $v \in E$, der als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ darstellbar ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.