R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 8 (Lösung)

Ausgabedatum: 1. Dezember 2025
Abgabedatum: 8. Dezember 2025

Übungsaufgabe I-8.1. (Vektorräume)

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Vektorräume über dem üblichen Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

  (i) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y \coloneqq \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ und $\alpha \odot x \coloneqq \sqrt[3]{\alpha} \cdot x$

  (ii) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y \coloneqq x + y - i$ und $\alpha \odot x \coloneqq \alpha \cdot (x - i) + i$

  (iii) $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle, \odot)$ mit $\alpha \odot A \coloneqq \{\alpha \cdot x \mid x \in A\}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie, in welchen Fällen Sie die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$ mit einer S-Multiplikation zu einem Vektorraum ergänzen können und welche Körper Sie dafür verwenden können.

Lösung.

(a) (i) Sowohl die innere wie auch die äußere Abbildung liefern eine wohldefinierte **Verknüpfung** der Menge in sich. Dabei ist

$$(x \oplus y) \oplus z = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \oplus z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} = x \oplus \sqrt[3]{y^3 + z^3} = x \oplus (y \oplus z),$$

also die additive Verknüpfung **assoziativ**, damit handelt es sich um eine **Halbgruppe**. Weiterhin ist die 0 immernoch additiv neutral und die zu $x \in \mathbb{R}$ ist $-x \in \mathbb{R}$ additiv invers. Damit handelt es sich um eine Gruppe, und die Kommutativität der gewöhnlichen Addition in $\mathbb{R}$ überträgt sich direkt auf die hier angegebene, damit liegt eine **abelsche Gruppe** vor.

Das gemischte Assoziativgesetz gilt ebenso, denn für $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ ist

$$(\alpha \cdot \beta) \odot x = \sqrt[3]{\alpha \cdot \beta} \cdot x = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta} \cdot x = \alpha \odot (\beta \odot x).$$

Da weiterhin für $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ auch

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{\alpha \cdot (x^3 + y^3)} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{\alpha} x)^3 + (\sqrt[3]{\alpha} y)^3} = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$$

sowie

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot x &= \sqrt[3]{\alpha + \beta} x = \sqrt[3]{\alpha + \beta} \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{(\alpha + \beta) x^3} \\ &= \sqrt[3]{\alpha x^3 + \beta x^3} = \sqrt[3]{\alpha} x + \sqrt[3]{\beta} x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)\end{aligned}$$

gilt, gelten die **gemischten Distributivgesetze** und die 1 ist **multiplikativ neutral**, womit ein **Vektorraum** vorliegt.

(ii) Die Abbildung $\oplus$ ist eine **Verknüpfung**, denn sie bildet wieder in die komplexen Zahlen ab. Assoziativ ist diese Verknüpfung ebenfalls, denn es ist für $u, v, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(u \oplus v) \oplus w &= (u + v - i) \oplus w \\ &= (u + v - i) + w - i \\ &= u + v + w - 2 \cdot i \\ &= u + (v + w - i) - i \\ &= u \oplus (v + w - i) \\ &= u \oplus (v \oplus w)\end{aligned}$$

entsprechend liegt mit $(\mathbb{C}, \oplus)$ eine **Halbgruppe** vor. Das neutrale Element bzgl. der Addition $\oplus$ ist das Element i, denn es ist

$$u \oplus i = u + i - i = u.$$

Es liegt mit $(\mathbb{C}, \oplus)$ also schonmal ein **Monoid** vor. Das zu x in $\mathbb{C}$ bzgl. $\oplus$ inverse Element ist $-x + 2i$, denn dann ist

$$x \oplus -x + 2i = x - x + 2i - i = i,$$

Mit $(\mathbb{C}, \oplus)$ liegt also eine **abelsche Gruppe** vor, in der die Kommutativität direkt aus der Kommutativität der üblichen Addition in $\mathbb{C}$ geerbt wird.

Weiterhin ist die multiplikative Abbildung $\odot$ ebenfalls eine äußere Vernüpfung, denn sie bildet wieder nach $\mathbb{C}$ ab. Zusätzlich gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\alpha \odot (u \oplus v) &= \alpha \odot (u + v - i) \\ &= \alpha \cdot (u + v - 2i) + i \\ &= (\alpha \cdot (v - i) + i) + (\alpha \cdot (u - i) + i) - i\end{aligned}$$

$$= (\alpha \odot v) \oplus (\alpha \odot u)$$

und

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot v &= (\alpha + \beta) \cdot (v - i) + i \\ &= (\alpha(v - i) + i) + (\beta(v - i) + i) - i \\ &= (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v),\end{aligned}$$

also gelten die gemischten **Distributivgesetze**. Weiter ist

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta) \odot v &= (\alpha \cdot \beta) \cdot (v - i) + i \\ &= \alpha \cdot ((\beta \cdot (v - i) + i) - i) + i \\ &= \alpha \odot (\beta \odot v),\end{aligned}$$

und damit das **Assoziativgesetz**. Auch ist die Körper-Eins 1 neutral bzgl. der S-Multiplikation, denn

$$1 \odot v = v - i + i = v.$$

Hier handelt es sich also um einen Vektorraum.

(iii) Hier ist $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$ eine inzwischen hinlänglich bekannte **abelsche Gruppe** mit dem neutralen Element $\emptyset$.

Außerdem ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\alpha \odot (A \triangle B) &= \alpha \odot (A \setminus B \cup B \setminus A) \\ &= (\alpha \odot (A \setminus B)) \cup (\alpha \odot (B \setminus A)) \\ &= ((\alpha \odot A) \setminus (\alpha \odot B)) \cup ((\alpha \odot B) \setminus (\alpha \odot A)) \\ &= (\alpha \odot A) \triangle (\alpha \odot B)\end{aligned}$$

es gilt also das **erste Distributivgesetz**, allerdings ist i. A.

$$(\alpha + \beta) \odot B = \{(\alpha + \beta) \cdot b \mid b \in B\} \neq (\alpha \odot B) \triangle (\beta \odot B),$$

wie man z. B. für $B = \mathbb{R}$, $\alpha = \beta = 1$ sieht, denn hier ist

$$(\alpha + \beta) \odot B = 2\mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset = \mathbb{R} \triangle \mathbb{R} = (\alpha \odot B) \triangle (\beta \odot B),$$

das **zweite Distributivgesetz gilt also nicht**, entsprechend handelt es sich um **keinen Vektorraum**. Das gemischte **Assoziativgesetz gilt** allerdings, denn hier ist

$$(\alpha \cdot \beta) \odot B = \{(\alpha \cdot \beta) \cdot b \mid b \in B\} = \alpha \odot \{\beta \cdot b \mid b \in B\} = \alpha \odot (\beta \odot B)$$

und auch die **Körper-Eins** 1 **ist neutral** in der S-Multiplikation, denn hier ist

$$1 \odot B = \{1 \cdot b \mid b \in B\} = \{b \mid b \in B\} = B.$$

(b) Die Voraussetzung an einen Vektorraum $(V, \oplus, \odot)$, dass $(V, \oplus)$ eine kommutative Gruppe sein muss impliziert direkt, dass wir nur eine Chance haben die $(S_n, \circ)$ zu einem Vektorraum zu ergänzen, wenn $n \in \{1, 2\}$ ist, denn ab $n = 3$ existieren die Permutationen $\tau(1, 2)$ und $\tau(2, 3)$, die nicht kommutieren.

Für $n = 1$ besteht die Gruppe nur aus dem neutralen Element (der Identität). Unabhängig von der Wahl des Körpers kann man hier nur eine einzige skalare Multiplikation definieren (nämlich die, die das einzige Element der Gruppe immer als Bild hat). Hier ist 1_K auch neutral bezüglich der S-Multiplikation und die gemischten Gesetze gelten trivialerweise. Hier hat man also beliebige Wahl des Körpers.

Für $n = 2$ besteht die Gruppe aus id und $\tau(1, 2)$. In jedem Vektorraum V gilt für $v \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ $\alpha v = \beta v$ genau dann, wenn $(\alpha - \beta)v = 0$, was wiederum genau dann gilt, wenn $\alpha = \beta$ oder $v = 0$ ist. Damit hat jeder Vektorraum, der mindestens ein nicht-Null Element enthält, mindestens so viele Elemente wie der Körper. Uns stehen hier also nur Körper mit genau zwei Elementen zur Verfügung, und bis auf Isomorphie ist das einzig der $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

Übungsaufgabe I-8.2. (Linearkombinationen)

Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der übliche Körper der reellen Zahlen.

(a) Gegeben sei der Vektorraum der reellen Folgen $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, +, \odot)$ über $\mathbb{R}$ aus Beispiel 11.3. Berechnen Sie die Linearkombination der Vektoren $v_1 = (1, 0, 1, 0, \dots)$, $v_2 = (1, 1, -2, 0, \dots)$ und $v_3 = (3, 2, -3, 0, \dots)$ zu den Koeffizienten $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = -1$. Zeigen Sie weiterhin, dass v_3 eine Linearkombination von v_1 und v_2 ist.

(b) Gegeben sei der Vektorraum $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ über sich selbst. Entscheiden Sie, ob $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ eine Linearkombination der Familie von Vektoren $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist. Falls ja, bestimmen Sie passende Koeffizienten einer Linearkombination.

Lösung.

(a) In dieser Lösung erlauben wir uns mal, die Folgen weiter als „unendliche Tupel“ zu schreiben, statt als Funktionen. Es ist dann

$$\begin{aligned} 2v_1 + 4v_2 - v_3 &= 2 \cdot (1, 0, 1, 0, \dots) + 4 \cdot (1, 1, -2, 0, \dots) - 1 \cdot (3, 2, -3, 0, \dots) \\ &= (2 + 4 - 3, 0 + 4 - 2, 2 - 8 + 3, 0, \dots) \\ &= (3, 2, -3, 0, \dots) = v_3, \end{aligned}$$

wir können also direkt ablesen, dass $2v_1 + 4v_2 = 2v_3$ und teilen durch 2 auf beiden Seiten liefert, dass v_3 eine Linearkombination von v_1 und v_2 zu den Koeffizienten 1 und 2 ist.

(b) Achtung, diese Aufgabenstellung benötigt ein gewisses Maß an Interpretation über die Lineare Algebra hinaus (deshalb hier als Übungs-, nicht als Hausaufgabe). Dass der Grenzwert der Reihe in der Aufgabenstellung hingeschrieben werden kann, setzt voraus, dass dieser Reihengrenzwert auch existiert. In allen norminduzierten Topologien ist das auch der Fall, da die allgemeine harmonische Reihe mit dem Quadrat im Exponenten im Sinne der betraginduzierten Topologie konvergiert, der Ausdruck $l \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist also eine reelle Zahl. Die Familie von Vektoren ist eine Familie reeller Zahlen, die alle ungleich Null sind. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ können wir also schreiben

$$l = \frac{1}{k} \cdot \underbrace{k \cdot l}_{\alpha \coloneqq}$$

es reicht also schon ein beliebiger Vektor der Familie um die Linearkombination bilden zu können.

Übungsaufgabe I-8.3. (Unterräume)

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $(K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ einen Untervektorraum bilden.

(i) $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0\}$

(ii) $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_i = 0 \; \forall i \geqslant 17\}$

(iii) $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_1 \neq 0\} \cup \{0\}$

(iv) $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_n = nx \text{ für ein } x \in K\}$

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_1, +, \cdot)$ sowie $(U_2, +, \cdot)$ Unterräume. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V :\Leftrightarrow (U \text{ ist Unterraum von } V)$ eine Ordnungsrelation auf der Klasse aller Vektorräume definiert.

Lösung.

(a) (i) Die Menge $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0\}$ ist nichtleer, denn sie enthält die Null im Folgenraum. Ebenfalls ist sie abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und daher ein Unterraum.

(ii) Die Menge $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_i = 0 \; \forall i \geqslant 17\}$ ist nichtleer, denn sie enthält die Null im Folgenraum. Ebenfalls ist sie abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und daher ein Unterraum.

(iii) Die Menge $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_1 \neq 0\} \cup \{0\}$ ist offensichtlich nichtleer, denn sie enthält die Null im Folgenraum, ist unter Multiplikation sogar abgeschlossen, allerdings nicht unter Addition, denn beispielsweise die Summe der Folgen $(1, 1, 0, \dots)$ und $(-1, 0, 0, \dots)$ liegt nicht in der Menge.

(*iv*) Die Menge $\{v \in K^{\mathbb{N}} \mid v_n = nx \text{ für ein } x \in K\}$ enthält den Nullvektor (er gehört zu $x = 0$). Wegen des gemischten Distributivgesetzes ist die Menge abgeschlossen unter S-Multiplikation und wegen der Kommutativität in der abelschen Gruppe auch unter Addition, da $nx + ny = n(x + y)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in K$.

(b) Wir wissen bereits aus Hausaufgabe I-5.4 , dass $U_1 \cup U_2$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt. In diesem Fall ist $U_1 \cup U_2 = U_1$ oder $U_1 \cup U_2 = U_2$ und damit $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum.

(c) Wir zeigen die definierenden Eigenschaften einer Ordnungsrelation, also Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität. Klar ist, dass Unter-/Oberräume die gleichen Verknüpfungen und den gleichen zugrundeliegenden Körper teilen.

Offensichtlich ist jeder Vektorraum ein Untervektorraum von sich selbst, also $\overset{\text{UR}}{\preccurlyeq}$ **reflexiv**.

Sind nun U und V Vektorräume mit $U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V$ und $V \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} U$, dann ist wegen der Teilmengeneigenschaft schon $U = V$ und $\overset{\text{UR}}{\preccurlyeq}$ **antisymmetrisch**.

Sind nun U, V und W Vektorräume mit $U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V$ und $V \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} W$ dann gilt wegen der Transitivität der Mengeninklusionsordnung auf der Klasse aller Mengen, dass $U \subseteq W$. Alle Verknüpfungen sitmmen überein und U ist nichtleer sowie abgeschlossen unter den Verknüfungen, also ist $\overset{\text{UR}}{\preccurlyeq}$ **transitiv**.

Übungsaufgabe I-8.4. (Erzeugung in Vektorräumen)

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Dann sind $(\mathcal{P}(V), \subseteq)$ und $(\{U \in \mathcal{P}(V) \mid U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V\}, \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq})$ partiell geordnete Mengen. Zeigen Sie, dass die Hüllenbildung $\langle \cdot \rangle : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ ein **Ordnungshomomorphismus** ist, also dass für $E, F \in \mathcal{P}(V)$ gilt:

$$E \subseteq F \;\Rightarrow\; \langle E \rangle \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} \langle F \rangle$$

Lösung.

Es sei $E \subseteq F$. Wegen $F \subseteq \langle F \rangle$ ist entsprechend auch $E \subseteq \langle F \rangle$, also ist $\langle F \rangle$ ein Untervektorraum von V, der E enthält und damit auf Grund der Hüllenkonstruktion der linearen Hülle auch $\langle E \rangle \subseteq \langle F \rangle$.

Übungsaufgabe I-8.5. (Lineare (Un-)abhängigkeit)

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen E von Vektoren in einem Vektorraum linear (un-)abhängig sind und beweisen Sie Ihre Antwort.
  (i) $E \coloneqq \{(1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\}$ in $(\mathbb{R}_3,+,\cdot)$ über $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.
  (ii) $E \coloneqq \{1,1,2\}$ in $(\mathbb{Z}_3,+_3,\cdot_3)$ über sich selbst.
  (iii) $E \coloneqq \{\{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X),\triangle,\cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2,+_2,\cdot_2)$.

(b) Es seien $(V,+_V,\cdot_V)$ und $(W,+_W,\cdot_W)$ Vektorräume über einem Körper $(K,+_K,\cdot_K)$, $E \subseteq V$ sowie $F \subseteq W$ und $V \times W$ der Vektorraum mit den komponentenweisen Verknüpfungen aus Hausaufgabe I-8.1. Was können Sie i. A. über die lineare (Un-)abhängigkeit der Menge $E \times F$ in $V \times W$ in den folgenden Fällen aussagen?
  (i) E ist linear unabhängig in V und F ist linear unabhängig in W.
  (ii) E ist linear abhängig in V und F ist linear unabhängig in W.
  (iii) E ist linear abhängig in V und F ist linear abhängig in W.

Lösung.

(a) (i) $E \coloneqq \{(1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\}$ in $(\mathbb{R}_3,+,\cdot)$ über $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist eine **linear abhängige Menge**. Entweder erkennt man durch „scharfes Hinsehen“, dass

$$1(1,2,3) + 1(3,2,1) + (-4)\cdot(1,1,1) = 0$$

oder man untersucht, welche Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(3,2,1) + \alpha_3(1,1,1) = 0$$

also das System

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.1}$$
$$2\,\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.2}$$
$$3\,\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.3}$$

lösen. Subtrahiert man (0.2) von (0.3), dann ergibt sich

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.4}$$
$$2\,\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.5}$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 \quad = 0 \tag{0.6}$$

und setzt man (0.6) in eine der beiden anderen verbleibenden Gleichungen ein, dann erhält man $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{4}\alpha_3$ (und damit auch rationale Lösungen, nämlich z. B. die oben angegebene).

(ii) $E \coloneqq \{1, 1, 2\}$ in $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ über sich selbst können wir zuerst einmal vereinfachen, denn $E = \{1, 2\}$. Diese Menge ist **linear abhängig**, denn in der Modulo-3 Arithmetik sind 1 und 2 zueinander additiv invers, es gilt also

$$1 \cdot_3 1 +_3 1 \cdot_3 2 = 1 +_3 2 = 3 \mod 3 = 0.$$

(iii) $E \coloneqq \{\{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ist **linear unabhängig**, denn ist $E_0 \subseteq E$ endlich, und ist

$$A \coloneqq \bigtriangleup_{x \in E_0} \alpha_x \{x\} = \emptyset$$

gegeben, dann enthält A genau alle Elemente x, deren Koeffizient $\alpha_x = 1$ ist, daher muss $\alpha_x = 0 \in Z_2$ für alle $x \in E_0$ sein.

(b) Die Produktmente $E \times F = \{(e, f) \mid e \in E,\ f \in F\}$ übernimmt i. A. leider wenig Struktur der einzelnen Mengen in Bezug auf lineare (Un-)abhängigkeit.

(i) Sind E und F linear unabhängig in V bzw. W, dann lässt sich i. A. nichts über die lineare (Un-)abhängigkeit der Produktmenge aussagen.

So sind z. B. $E \coloneqq F \coloneqq \{1\} \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ linear unabhängige Mengen, deren Kreuzprodukt $E \times F = \{(1, 1)\}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ wieder linear unabhängig ist.

Andererseits sind die Mengen $E \coloneqq F \coloneqq \{(0, 1),\ (1, 0)\} \subseteq (\mathbb{R}_2, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ linear unabhängig, doch das Kreuzprodukt

$$E \times F = \{((1, 0), (1, 0)),\ ((1, 0), (0, 1)),\ ((0, 1), (1, 0)),\ ((0, 1), (0, 1))\}$$

ist linear abhängig, denn es ermöglicht die Linearkombination

$$1 \cdot ((1, 0), (1, 0)) + (-1) \cdot ((1, 0), (0, 1)) + (-1) \cdot ((0, 1), (1, 0)) + 1 \cdot ((0, 1), (0, 1)) = 0.$$

Beachte: Mit den Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ kann man offensichtlich rechnen wie mit Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$.

(ii) Ist E linear abhängig in V und F linear unabhängig in W, dann lässt sich i. A. auch nichts über die lineare Unabhängigkeit der Produktmenge aussagen.

Z. B. ist $E \coloneqq \{1, 2\} \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ linear abhängig und $F \coloneqq \{1\} \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ linear unabhängig sowie $E \times F = \{(1, 1), (2, 1)\}$ linear unabhängig im Produktraum.

Andererseits sind die Mengen $E \coloneqq \{1, 2\} \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $F \coloneqq \{(1, 0), (0, 1)\} \subseteq (\mathbb{R}_2, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ebenfalls Mengen dieser Form und die Produktmenge

$$E \times F = \{(1, (1, 0)),\ (1, (0, 1)),\ (2, (1, 0)),\ (2, (0, 1))\}$$

ist linear abhängig, denn sie ermöglicht die Linearkombination

$$1 \cdot (1,(1,0)) + (-1) \cdot (1,(0,1)) + (-1) \cdot (2,(1,0)) + 1 \cdot (2,(0,1)) = 0.$$

(iii) Wir können zeigen, dass $E \times F$ linear abhängig in $V \times W$ ist, wenn E und F linear abhängig in V bzw. W sind. Für die Übersichtlichkeit werden wir die Operationen auf V und W nicht mit ihren entsprechenden Indizes notieren. Wir führen den Beweis hier für Familien.

Es seien also $n_V, n_W \in \mathbb{N}$, Koeffizienten $\alpha_\ell \neq 0$ für alle $\ell \in \{1,\dots,n_V\}$ und $\beta_k \neq 0$ für alle $k \in \{1,\dots,n_W\}$ sowie jeweils paarweise verschiedene Vektoren $v_1,\dots,v_{n_V}$ und $w_1,\dots,w_{n_W}$ gegeben, so dass

$$\sum_{\ell=1}^{n_V} \alpha_\ell \cdot v_\ell = 0_V \in V \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n_W} \beta_k \cdot w_k = 0_W \in W.$$

Dann sind die Vektoren (v_ℓ, w_k) paarweise verschieden und $\alpha_\ell \cdot \beta_k \neq 0$ für alle Kombinationen $\ell \in \{1,\dots,n_V\}$ und $k \in \{1,\dots,n_W\}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n_V}\sum_{k=1}^{n_W} \alpha_\ell\beta_k \cdot (v_\ell, w_k) &= \sum_{\ell=1}^{n_V}\sum_{k=1}^{n_W} (\alpha_\ell\beta_k \cdot v_\ell, \alpha_\ell\beta_k \cdot w_k) \\
&\qquad \text{(Produkt komponentenweise)} \\
&= \left(\sum_{\ell=1}^{n_V}\sum_{k=1}^{n_W} \alpha_\ell\beta_k \cdot v_\ell, \sum_{\ell=1}^{n_V}\sum_{k=1}^{n_W} \alpha_\ell\beta_k \cdot w_k \right) \\
&\qquad \text{(Summe komponentenweise)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n_W} \beta_k \cdot \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n_V} \alpha_\ell \cdot v_\ell}_{=0}, \sum_{\ell=1}^{n_V} \alpha_\ell \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n_W} \beta_k \cdot w_k}_{=0} \right) \\
&\qquad \text{(umsortiert/ausgeklammert)} \\
&= (0,0)
\end{aligned}$$

Hausaufgabe I-8.1 (Vektorräume) $2 + 1.5 + 1.5 = 5$ Punkte

(a) Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der übliche Körper der reellen Zahlen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

- (i) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y \coloneqq \sqrt[2]{x^2 + y^2}$ und $\alpha \odot x \coloneqq \sqrt[2]{\alpha} \cdot x$
- (ii) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$, wobei $\oplus$ die übliche Addition in $\mathbb{C}$ ist und $\alpha \odot x \coloneqq \alpha \cdot \overline{x}$
- (iii) $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y \coloneqq x \cdot y$ und $\alpha \odot x \coloneqq x^\alpha$

(b) Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ die bereits bekannte abelsche Gruppe. Geben Sie eine skalare Multiplikation an, so dass $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ mit dieser S-Multiplikation ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ergibt.

(c) Es seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ Vektorräume über einem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$. Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon (V \times W)^2 &\to (V \times W) & (v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) &\coloneqq (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w}) \\ \cdot\colon K \times (V \times W) &\to (V \times W) & \alpha \cdot (v, w) &\coloneqq (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w) \end{aligned}$$

ein Vektorraum über K ist.

Lösung.

(a) (i) Wie schon in Übungsaufgabe I-8.1 Teilaufgabe (a)(i) haben wir hier eine assoziative Verknüpfung vorliegen, allerdings existiert hier für alle Elemente mit $x < 0$ kein additiv neutrales Element mehr. Hier handelt es sich also um **keinen Vektorraum.** (0.5 Punkte)

(ii) Bekanntermaßen ist $(\mathbb{C}, +)$ eine **abelsche Gruppe** (Beispiele 7.22 und 7.29), die **äußere Verknüpfung** bildet wieder nach $\mathbb{C}$ ab, da $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Außerdem ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{C}$ wegen der Rechenregeln in den komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} \alpha \odot (u \oplus v) &= \alpha \cdot \overline{u + v} &&= \alpha \cdot \overline{u} + \alpha \cdot \overline{v} = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v) \\ (\alpha + \beta) \odot v &= (\alpha + \beta) \cdot \overline{v} &&= \alpha \cdot \overline{v} + \beta \cdot \overline{v} = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v), \end{aligned}$$

es gelten also die gemischten **Distributiv**gesetze. Nun ist aber i. A.

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = (\alpha \cdot \beta) \cdot \overline{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{v}) \neq \alpha \cdot (\overline{\beta \cdot \overline{v}}) = \alpha \odot (\beta \odot v),$$

wie man z. B. für $v = i$, $\alpha = \beta = 1$ sieht, denn hier ist

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = 1 \odot i = 1 \cdot (-i) = -i \neq i = 1 \cdot i = 1 \odot (-i) = 1 \odot (1 \odot i) = \alpha \odot (\beta \odot v)$$

damit gilt das gemischte **Assoziativgesetz nicht**.

Zudem ist die **Eins im Körper $\mathbb{C}$ nicht neutral** bzgl. $\odot$, denn z. B. $1 \odot i = -i \neq i$.

Hier handelt es sich also **nicht um einen Vektorraum**. (0.5 Punkte)

(iii) $(R_{>0}, \cdot)$ ist eine **abelsche Gruppe**, denn die Multiplikation bildet positive Zahlen auf positive Zahlen ab und ist assoziativ sowie kommutativ. Das neutrale Element ist die (positive, reelle) Zahl 1, alle positiven Zahlen sind multiplikativ invertierbar und die Inversen sind ebenfalls positiv und reell. (0.5 Punkte)

Die Potenzen x^α, $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sind alle positiv, entsprechend ist die skalare Multiplikation tatsächlich eine **äußere Verknüpfung**. Außerdem ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{R}_{>0}$ (hier wird Schulwissen für das Rechnen mit Potenzen vorausgesetzt):

$$\begin{aligned} \alpha \odot (u \oplus v) &= (u \cdot v)^\alpha &&= u^\alpha \cdot v^\alpha &&= (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v) \\ (\alpha + \beta) \odot v &= v^{\alpha+\beta} &&= v^\alpha \cdot v^\beta &&= (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v) \\ (\alpha \cdot \beta) \odot v &= v^{\alpha \cdot \beta} &&= \left(v^\beta\right)^\alpha &&= \alpha \odot (\beta \odot v), \end{aligned}$$

es gelten also die gemischten **Distributiv**gesetze und das gemischte **Assoziativ**gesetz. Die **Eins im Körper ist auch neutral** bzgl. $\odot$, denn $x^1 = x \; \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$. (0.5 Punkte)

Hier handelt es sich also um einen Vektorraum.

Beachte: Die Vektorraum-Null und die Körper-Eins stimmen hier also zufällig überein.

(b) Die einzige Möglichkeit, eine skalare Multiplikation zu definieren, ist durch die Forderung der Neutralität der Körper-Eins und den Rechenregeln aus Lemma 11.5 festgelegt. Es muss nämlich für die beiden Elemente $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$ und beliebiges $v \in V := \mathcal{P}(X)$ gelten:

$$\begin{aligned} 0 \odot v &= \emptyset && \text{(Rechenregel)} \\ 1 \odot v &= v. && \text{(Neutralität der 1)} \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

Hier erhalten wir tatsächlich einen Vektorraum, für $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \alpha \odot (u \triangle v) &= u \triangle v = (\alpha \odot u) \triangle (\alpha \odot v) && \text{falls } \alpha = 1 \\ \alpha \odot (u \triangle v) &= \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = (\alpha \odot u) \triangle (\alpha \odot v) && \text{falls } \alpha = 0 \end{aligned}$$

und

$$(\alpha + \beta) \odot v = 0 \odot v = \emptyset = (\alpha \odot v) \triangle (\beta \odot v) \qquad \text{falls } \alpha = \beta$$

$$(\alpha + \beta) \odot v = 1 \odot v = \emptyset \triangle 1 \odot v = (\alpha \odot v) \triangle (\beta \odot v) \qquad \text{falls } \alpha \neq \beta,$$

es gelten also die **Distributivgesetze**. Dabei ist der rot markierte Teil entscheidend, denn sowohl in $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ als auch in $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ sind alle Elemente selbstinvers, was den Fall $\alpha = \beta = 1$ abdeckt. Diese Konstruktion also dann anwendbar, wenn eine Gruppe vorliegt, in der jedes Element selbstinvers ist (eine sogenannte boolesche Gruppe).

Zuletzt gilt das **Assoziativgesetz**, denn

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \odot v &= 1 \odot v = 1 \odot (1 \odot v) = \alpha \odot (\beta \odot v) && \text{falls } \alpha = \beta = 1 \\ (\alpha \cdot \beta) \odot v &= 0 \odot v = \emptyset = \alpha \odot (\beta \odot v) && \text{sonst.} \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(c) Die benötigten Eigenschaften folgen sofort aus der komponentenweisen Definition der Verknüpfungen auf dem Produktraum. Diese ist natürlich wieder assoziativ und kommutatitv, das neutrale Element bzgl. der Addition ist $(0_V, 0_W)$ und das zu (v, w) inverse Element ist $-(v, w) = (-v, -w)$. Weiter ist für $\alpha, \beta \in K$, $(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v, w) \in V \times W$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot ((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) &= \big(\alpha \cdot_V (v_1 +_V v_2), \alpha \cdot_W (w_1 +_W w_2)\big) \\ &= \big(\alpha \cdot_V v_1 +_V \alpha \cdot_V v_2, \alpha \cdot_W w_1 +_W \alpha \cdot_W w_2\big) \\ &= \alpha \cdot (v_1, w_1) + \alpha \cdot (v_2, w_2) \\ (\alpha +_K \beta) \cdot (v, w) &= ((\alpha +_K \beta) \cdot_V v, (\alpha +_K \beta) \cdot_W w) \\ &= (\alpha \cdot_V v + \beta \cdot_V v, \alpha \cdot_W w + \beta \cdot_W w) \\ &= \alpha \cdot (v, w) + \beta \cdot (v, w) \\ (\alpha \cdot_K \beta) \cdot (v, w) &= ((\alpha \cdot_K \beta) \cdot_V v, (\alpha \cdot_K \beta) \cdot_W w) \\ &= (\alpha \cdot_V (\beta \cdot_V v), \alpha \cdot_W (\beta \cdot_W w)) \\ &= \alpha \cdot (\beta \cdot (v, w)) \end{aligned}$$

und die Neutralität des neutralen Elements 1_K folgt sofort aus der komponentenweisen Neutralität. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-8.2 (Linearkombinationen) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

(a) Es sei $(\mathbb{R}_n, \oplus, \odot)$ als Vektorraum über dem üblichen Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen aus Beispiel 11.3 gegeben. Bestimmen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ der Vektor $v \coloneqq (-7, r, 2)$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1 \coloneqq (1, 2, 4)$, $v_2 \coloneqq (-2, 1, 2)$ und $v_3 \coloneqq (3, 1, 2)$ ist, und bestimmen Sie dann alle möglichen Koeffizienten aus Linearkombinationen von v_1, v_2, v_3, die v ergeben.

(b) Gegeben sei der Vektorraum $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \odot)$ mit der S-Multiplikation aus Hausaufgabe I-8.1 über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Bestimmen Sie alle Linearkombinationen der Vektoren

$$\{1, 2, 4, 8\}, \qquad \{1, 3, 9, 27\}, \qquad \{1, 4, 16, 64\},$$

die keine ungeraden Zahlen enthalten.

Lösung.

(a) Die Bedingung $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v$ liefert wegen der komponentenweise Addition und Multiplikation die drei Bedingungen

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -7 \tag{0.7}$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = r \tag{0.8}$$
$$4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \tag{0.9}$$

also ein lineares Gleichungssystem. Die Zeilen (0.8) und (0.9) liefern nachdem man (0.9) durch 2 geteilt hat, dass $r = 1$ gelten muss, also

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -7 \tag{0.10}$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \tag{0.11}$$

Subtrahieren des doppelten der Zeile (0.10) von (0.11) liefert $\alpha_2 = 3 + \alpha_3$. Setzt man das in (0.10) ein, dann erhält man $\alpha_1 = -1 - \alpha_3$ und damit die Lösungen $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = 3 + \alpha_3$, $\alpha_1 = -1 - \alpha_3$. Schreibt man die Koeffizienten α_i als Vektor des $\mathbb{R}_3$, dann erhält man die Lösungen

$$\{(-1, 3, 0) + s(-1, 1, 1) \mid s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_3.$$

(1.5 Punkte)

(b) Für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}_2$ ist die Linearkombination

$$\alpha_1\{1, 2, 4, 8\} \triangle \alpha_2\{1, 3, 9, 27\} \triangle \alpha_3\{1, 4, 16, 64\}$$

genau dann eine Obermenge von $\{3, 9, 27\}$, wenn $\alpha_2 = 1$ ist, daher muss $\alpha_2 = 0$ sein, wenn keine ungeraden Zahlen in der Linearkombinationen enthalten sein sollten. Wir müssen uns also nur um die Linearkombinationen

$$\alpha_1\{1, 2, 4, 8\} \triangle \alpha_3\{1, 4, 16, 64\}$$

kümmern, wo die einzige auftretende ungerade Zahl 1 ist, welche in beiden Mengen vorhanden ist, damit muss $\alpha_1 = \alpha_3$ sein, es ergeben sich

$$1\{1, 2, 4, 8\} \triangle 0\{1, 3, 9, 27\} \triangle 1\{1, 4, 16, 64\} = \{2, 8, 16, 64\}$$

$$0\{1,2,4,8\} \triangle 0\{1,3,9,27\} \triangle 0\{1,4,16,64\} = \emptyset.$$

(1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-8.3 (Unterräume) 3.5 + 0.5 + 1 = 5 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle, \odot)$ der aus Hausaufgabe I-8.1 bekannte Vektorraum über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen einen Untervektorraum bilden.

(i) $\{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\}$

(ii) $\mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$ für $B \subseteq X$

(iii) $\{\emptyset, X \setminus B\}$ für $B \subseteq X$

(iv) $\{A \subseteq X \mid A$ und X gleichmächtig$\} \cup \{\emptyset\}$

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen. Zeigen Sie Lemma 11.14 des Skripts, also dass dann auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterraum von $(V, +, \cdot)$ ist.

(c) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den punktweisen Verknüpfungen sowie

$$U \coloneqq \left\{f \in K^X \,\middle|\, f(x_0) = 0\right\},$$
$$W \coloneqq \left\{f \in K^X \,\middle|\, f(x) = f(y)\ \forall x, y \in X\right\}.$$

Zeigen Sie:

(i) U und W sind Unterräume von $(K^X, +, \cdot)$

(ii) $(U \cap W) = \{0\}$

Lösung.

(a) (i) Die Menge $\{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\}$ ist zwar nicht leer, denn X liegt darin, aber unter Multiplikation nicht abgeschlossen, denn Multiplikation mit $0 \in \mathbb{Z}_2$ liefert gerade die leere Menge. (0.5 Punkte)

(ii) Die Menge $\mathcal{P}(X) \setminus B$ für $B \subseteq X$ untersuchen wir mit einer Fallunterscheidung.

Für $B = \emptyset$ ist die Menge nie multiplikativ abgeschlossen, was wieder die Multiplikation von z. B. X mit $0 \in \mathbb{Z}_2$ zeigt.

Ist nun $B \neq \emptyset$, dann ist die Menge multiplikativ abgeschlossen. Es verbleibt für $B \neq \emptyset$ also die additive Abgeschlossenheit zu untersuchen.

Hat X genau ein Element, dann ist $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ gerade der triviale Untervektorraum.

Anderenfalls, also wenn mindestens zwei Elemente in X existieren, dann ist die Menge additiv nicht abgeschlossen, wofür wir wieder eine Fallunterscheidung heranziehen. Hat B nur ein Element, also $B = \{a\}$, dann existiert ein weiteres Element $b \in X \setminus B$ und damit ist $\{\{b\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$ und $\{b\} \triangle \{a, b\} = \{a\} = B \notin \mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$. Hat B mindestens zwei Elemente, eines davon $a \in B$, dann ist $\{\{a\}, B \setminus \{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$, und $\{a\} \triangle B \setminus \{a\} = B \notin \mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$. (1.5 Punkte)

(iii) Die Menge $\{\emptyset, X \setminus B\}$ für $B \subseteq X$ ist nichtleer und abgeschlossen unter den Verküpfungen und daher ein Untervektorraum. (0.5 Punkte)

(iv) Die Menge $\{A \subseteq X \,|\, A \text{ und } X \text{ gleichmächtig}\} \cup \{\emptyset\}$ ist genau dann ein Unterraum, wenn X endlich ist, denn dann ist die Menge gerade $\{\emptyset, X\}$. Anderenfalls ist für jedes $a \in X$ die Menge $X \setminus \{a\}$ gleichmächtig zu X aber es gilt $X \triangle (X \setminus \{a\}) = \{a\}$, was nicht zu X gleichmächtig ist. (1 Punkt)

(b) Wir nennen den gemeinsamen Körper, über dem wir die Vektorräume vorliegen haben, wieder $(K, +, \cdot)$. Aus der Schnittstabilität von Untergruppen folgt sofort, dass $\bigcap_{i\in I} U_i$ ebenfalls eine Untergruppe von V bzgl. $+$ ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \bigcap_{i\in I} U_i + \bigcap_{i\in I} U_i &\subseteq U_i \quad \forall i \in I \\ K \cdot \bigcap_{i\in I} U_i &\subseteq U_i \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \bigcap_{i\in I} U_i + \bigcap_{i\in I} U_i &\subseteq \bigcap_{i\in I} U_i \\ K \cdot \bigcap_{i\in I} U_i &\subseteq \bigcap_{i\in I} U_i. \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

(c) (i) Sowohl U (Funktionen, die in x_0 den Wert Null annehmen) als auch W (Funktionen, die konstant sind) enthalten die konstante Nullfunktion, sind also nicht leer. Für $f, g \in U$, $\alpha \in K$ ist

$$\begin{aligned} (f+g)(x_0) &= f(x_0) + g(x_0) = 0 + 0 = 0 \\ (\alpha f)(x_0) &= \alpha \cdot f(x_0) = \alpha \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

und für $f, g \in W$, $\alpha \in K$ ist

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = f(y) + g(y) = (f+g)(y) \ \forall x, y \in X \\ (\alpha f)(x) &= \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot f(y) = (\alpha \cdot f)(y) \ \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

(ii) Für $f \in U \cap W$ ist $f(x) = f(x_0) = 0 \; \forall x \in X$, also ist f die Nullfunktion. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe I-8.4 (Erzeugung in Vektorräumen) $2 + 2 = 4$ Punkte

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $E \subseteq V$. Zeigen Sie:

(i) $\langle E \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; (v_i \in \langle E \rangle, \; \alpha_i \in K) \right\}$.

(ii) $\langle E \rangle = \bigcup \{ \langle E_0 \rangle \mid E_0 \subseteq E, E_0 \text{ endlich} \}$.

(b) Bestimmen Sie eine möglichst explizite Darstellung der folgenden erzeugten Unterräume.

(i) $\langle (1, 2) \rangle$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$

(ii) $\langle \{ \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \} \rangle$ in $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \odot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, siehe Hausaufgabe I-8.1

Lösung.

(a) (i) Wir nutzen und erweitern hier die Darstellung der linearen Hülle aus Satz 11.16. Dabei passieren zwei Dinge. Zum Einen kann man die Mengen in eine Familiendarstellung umschreiben, zum Anderen die Menge E durch den von ihr erzeugten Vektorraum austauschen.

Per Definition der Endlichkeit von Mengen existiert für jede endliche Menge $E_0 \subseteq E$ eine Bijektion auf $[\![1, \#E_0]\!]$ und damit eine Familie $(v_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ mit $n = \#(E_0)$, die genau die Elemente von E_0 als Mitglieder hat. Damit gilt

$$\langle E \rangle \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; (v_i \in E, \; \alpha_i \in K) \right\}.$$

Für jede Familie $(\tilde{v}_i)_{i=1,\ldots,\tilde{n}}$ aus Mitgliedern aus E ist außerdem die Menge

$$\{ v \mid v \text{ ist Mitglied von} (v_i)_{i=1,\ldots,n} \} \subseteq E$$

endlich, daher ist auf Grund der Distributivität auch

$$\langle E \rangle \supseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; (v_i \in E, \; \alpha_i \in K) \right\},$$

womit Gleichheit der Mengen gilt.

Auf Grund der Hüllenkonstruktion der linearen Hülle ist insbesondere $\langle U \rangle = U$ für jeden Unterraum von U von V, wir können als weiterhin E durch $\langle E \rangle$ ersetzen. (1 Punkt)

(ii) Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Darstellung der von Mengen erzeugten Unterräume in Satz 11.16. Ist nämlich $w \in \langle E \rangle$, dann gibt es ein endliches $E_0 \subseteq E$ und passende Koeffizienten, so dass

$$w = \sum_{v \in E_0} \alpha_v \, v,$$

also insbesondere $w \in \langle E_0 \rangle \subseteq \bigcup\{\langle E_0 \rangle \,|\, E_0 \subset E, E_0 \text{ endlich}\}$, also ist $\langle E \rangle \subseteq \bigcup\{\langle E_0 \rangle \,|\, E_0 \subset E, E_0 \text{ endlich}\}$ und die verbleibende Inklusion gilt offensichtlich. (1 Punkt)

(b) (i) Hier gilt

$$\langle (1,2) \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot (1,2) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\} = \{\alpha \cdot (1,2) \,|\, \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

(1 Punkt)

(ii) Hier gilt

$$\begin{aligned} \langle \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\} \rangle &= \left\{ \bigtriangleup_{A} \alpha_A A \,\middle|\, A \in \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\} \right\} \\ &= \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Hausaufgabe I-8.5 (Lineare (Un-)abhängigkeit) 2.5 + 0.5 + 1 = 4 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen E von Vektoren in einem Vektorraum linear (un-)abhängig sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

(i) $E := \big\{(1,2,3), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}), (1,1,1)\big\}$ in $(\mathbb{R}_3, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

(ii) $E := \{e_x \,|\, x \in X\} \cup \{1\}$ in $(K^X, +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ (siehe (12.3) des Skripts).

(iii) $E := \{X \setminus \{x\} \,|\, x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Zeigen Sie, dass in einer linear unabhängigen Familie von Vektoren kein Element doppelt vorkommen kann.

(c) Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie Lemma 12.5 des Skripts in der Mengenformulierung, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.

(ii) Es gibt einen Vektor $v \in E$, der als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ darstellbar ist.

Lösung.

(a) (i) $E \coloneqq \big\{(1,2,3), (\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}), (1,1,1)\big\}$ in $(\mathbb{R}_3,+,\cdot)$ über $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist eine **linear unabhängige Menge**.

Der Vektor $(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$ hat Komponenten, die alle in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ liegen, alle verbleibenden Komponenten der anderen Vektoren sind in $\mathbb{Q}$, und auch der Nullvektor hat lediglich Komponenten aus $\mathbb{Q}$. Damit muss in jeder Linearkombination der Form

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}) + \alpha_3(1,1,1) = 0$$

der Koeffizient $\alpha_2 = 0$ sein. Für die verbleibenden Koeffizienten ergibt sich durch Vergleich der ersten und zweiten Komponenten, dass die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

gelten müssen, woraus sich direkt (subtrahieren der ersten von der zweiten Gleichung) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ergibt. (0.5 Punkte)

(ii) $E \coloneqq \{e_x \mid x \in X\} \cup \{1\}$ in $(K^X,+,\cdot)$ über einem Körper $(K,+,\cdot)$ ist genau dann **linear abhängig**, wenn X endlich ist, sonst **linear unabhängig**.

Ist X **endlich** (und nichtleer, wie vorausgesetzt), dann gibt es eine Bijektion in $[\![1,n]\!]$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $X = \{x_1,\dots,x_n\}$, dann ist

$$E = \{e_{x_i} \mid i \in [\![1,n]\!]\} \cup \{1\}$$

und die Nullfunktion ergibt sich als die endliche, nichtleere Linearkombinationen der paarweise verschiedenen Indikatorfunktionen und der Einsfunktion durch

$$\sum_{i=1}^n 1 \cdot e_{x_i} + (-1)\cdot 1 = 1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n e_{x_i}\right) + (-1)\cdot 1 = 1 \cdot 1 + (-1)\cdot 1 = (1-1)\cdot 1 = 0.$$

(0.5 Punkte)

Sei nun X **nicht endlich** und $n \in \mathbb{N}$ sowie f_ℓ, $\ell = 1,\dots,n$ paarweise verschiedene Vektoren aus E und für Koeffizienten $\alpha_\ell \in K$ eine Linearkombination der Nullfunktion durch

$$f \coloneqq \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell f_\ell = 0$$

gegeben.

Gilt $f_\ell \neq 1$ für alle $\ell = 1, \ldots, n$, dann gilt $f_\ell = e_{x_\ell}$ für paarweise verschiedene Elemente x_ℓ, $\ell = 1, \ldots, n$ aus X. Entsprechend ist für jedes k aus $\{1, \ldots, n\}$

$$0 = f(x_k) = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell f_\ell(x_k) = \alpha_k.$$

Gilt $f_k = 1$ für genau ein k aus $\{1, \ldots, n\}$, dann gilt $f_\ell = e_{x_\ell}$ für paarweise verschiedene Elemente x_ℓ, $\ell = \{1, \ldots, n\} \setminus k$ aus X. Da X nicht endlich ist, gibt es ein weiteres Element $x \in X \setminus \{x_\ell \,|\, \ell \in \{1, \ldots n\} \setminus k\}$, und wenn wir f an dieser Stelle auswerten, dann erhalten wir

$$0 = f(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell f_\ell(x) = \alpha_k \cdot 1(x) = \alpha_k$$

und die gleiche Argumentation, wie im Fall, wo $f_\ell \neq 1$ für alle $\ell = 1, \ldots, n$ galt, zeigt, dass die verbleibenden Koeffizienten ebenfalls 0 sein müssen. (0.5 Punkte)

(iii) $E \coloneqq \{X \setminus \{x\} \,|\, x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ benötigt Fallunterscheidungen.

Wir betrachten eine beliebige Linearkombination zu einer endlichen Menge $E_0 \subseteq E$ bzw die dazugehörige endliche Menge der $F_0 \coloneqq \{x \,|\, X \setminus \{x\} \in E_0\}$ gegeben durch

$$\emptyset = \mathop{\triangle}_{A \in E_0} \alpha_A A = \mathop{\triangle}_{x \in F_0} \alpha_x X \setminus \{x\} = \mathop{\triangle}_{x \in \tilde{F}_0} X \setminus \{x\}$$

für die Menge $\tilde{F}_0 = \{x \in F_0 \,|\, \alpha_x = 1\}$.

Angenommen die Kardinalität von $\tilde{F}_0$ wäre ungerade (und damit insbesondere nicht 0), dann ist

$$\emptyset = \mathop{\triangle}_{A \in E_0} \alpha_A A = \mathop{\triangle}_{x \in F_0} \alpha_x X \setminus \{x\} = \mathop{\triangle}_{x \in \tilde{F}_0} X \setminus \{x\} = X \setminus \tilde{F}_0.$$

Angenommen $\tilde{F}_0$ hätte gerade Kardinalität, dann ist

$$\emptyset = \mathop{\triangle}_{A \in E_0} \alpha_A A = \mathop{\triangle}_{x \in F_0} \alpha_x X \setminus \{x\} = \mathop{\triangle}_{x \in \tilde{F}_0} X \setminus \{x\} = \tilde{F}_0.$$

Die vorliegende Menge E ist also genau dann **linear abhängig**, wenn X endlich ist und $\#X$ ungerade ist. Anderenfalls ist sie **linear unabhängig**. (1 Punkt)

(b) Es sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus einem Vektorraum V mit einer nichtleeren Indexmenge I. Falls Indizes $i \neq j$ aus I existieren, so dass $v_i = v_j$ ist, so können wir zu diesen Indizes die Linearkombination

$$1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = 1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_i = (1 - 1) \cdot v_i = 0 \cdot v_i = 0$$

des Nullvektors angeben. Hier sind die Indizes unterschiedlich, die Koeffizienten nicht alle 0, also ist eine solche Familie immer linear abhängig. (0.5 Punkte)

(c) (i) „$\Rightarrow$“: Da E linear abhängig ist, gibt es für eine nichtriviale Linearkombination der Null, also eine endliche, nichtleere Teilmenge $E_0 \subseteq E$, sodass

$$0 = \sum_{v \in E_0} \alpha_v v.$$

Da diese Linearkombination nichttrivial ist existiert ein $v \in E_0$ mit $v \neq 0$ und $\alpha_v \neq 0$. Entsprechend ist

$$\alpha_v v = -\sum_{w \in E_0 \setminus \{v\} \alpha_w w}$$

und damit

$$v = -\sum_{w \in E_0 \setminus \{v\} \frac{\alpha_w}{\alpha_v} w}.$$

(0.5 Punkte)

„$\Leftarrow$“: Ist $v \in E$ und eine Linearkombination zu endlichem $E_0 \subseteq E \setminus \{v\}$ mit

$$v = \sum_{w \in E_0} \alpha_w w$$

gegeben, dann ist $E_0 \cup \{v\} \subseteq E$ endlich und es gilt offensichtlich

$$0 = \left(\sum_{w \in E_0} \alpha_w w \right) - v,$$

was eine nichttriviale Linearkombination der 0 ist, womit E linear abhängig ist. (0.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.