R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 7

Ausgabedatum: 24. November 2025
Abgabedatum: 1. Dezember 2025

Übungsaufgabe I-7.1. (Ringe und Unterringe)

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Ringe sind und ob diese kommutativ sind. Bestimmen Sie für die Ringe mit Eins die Charakteristik.

(i) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cup)$
(ii) $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$
(iii) $(\mathbb{Z}, +, \max(\cdot, \cdot))$
(iv) $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$

(b) Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass der Endomorphismenring $(\operatorname{End}(G), +, \circ)$ (Beispiel 9.2 des Skripts) tatsächlich ein Ring ist.

(c) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $((R_i, +, \cdot))_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterringen. Zeigen Sie Lemma 9.16, also dass $\bigcap_{i \in I} R_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterring von $(R, +, \cdot)$ ist.

(d) Belegen Sie mit einem Beispiel, dass die Vereinigung zweier Unterringe eines Rings im Allgemeinen kein Unterring ist.

Übungsaufgabe I-7.2. (Nullteiler)

(a) Untersuchen Sie, welche der Ringe aus Übungsaufgabe I-7.1 Teilaufgabe (a) nullteilerfrei sind, und ob es sich um Integritätsringe handelt.

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie Lemma 9.8, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen für $a \in R$:

(i) a ist kein Linksnullteiler von R.

(ii) Der Gruppenhomomorphismus $(R, +) \ni b \mapsto a \cdot b \in (R, +)$ ist injektiv.

(iii) Für alle $b, c \in R$ gilt: $a \cdot b = a \cdot c$ impliziert $b = c$.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{char}(R)$ eine Primzahl oder 0 ist.

(d) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring und S ein Unterring von R, der kein Nullring ist und eine Eins besitzt. Zeigen Sie, dass dann schon $1_R = 1_S$ gilt.

Übungsaufgabe I-7.3. (Ringhomomorphismen)

(a) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ zwei Ringe und $f\colon R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Besitzen die Ringe die Einselemente 1_{R_1} respektive 1_{R_2}, dann fordern wir zusätzlich die Bedingung $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ in Gleichung (9.5c) um f einen Homomorphismus von Ringen mit Eins zu nennen. Zeigen Sie, dass diese Bedingung äquivalent zu $1_{R_2} \in \operatorname{Bild}(f)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für jeden Ring $(R, +, \cdot)$ mit 1_R genau einen Ringhomomorphismus $f\colon (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (R, +, \cdot)$ von Ringen mit Eins gibt.

Übungsaufgabe I-7.4. (Ideale und Faktorringe)

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Teilmengen des dazugehörigen Rings Ideale mit den entsprechenden Verknüpfungen bilden.

   (i) Die ungeraden ganzen Zahlen in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

   (ii) $\{f \circ g \mid f, g \in \operatorname{End}(\mathbb{Q}), f \text{ invertierbar}\}$ in dem Gruppenendomorphismenring $(\operatorname{End}(\mathbb{Q}), +, \circ)$

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie Lemma 9.34, also dass wenn $(J_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine Familie von Idealen mit nichtleerer Indexmenge I ist, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} J_i$ ein Ideal in R.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und J ein Ideal in R. Zeigen Sie, dass wenn $1_R \in J$ ist, dann ist $J = R$.

(d) Bestimmen Sie ohne Beweis aber mit knapper Erklärung die unten stehenden erzeugten Ideale in den dazugehörigen Ringen

   (i) $(\sqrt{2})$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

   (ii) (A) für $A \in \mathcal{P}(X)$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$

Übungsaufgabe I-7.5. (Körper und Körperhomomorphismen)

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x \cdot x = x$ in K.

(b) Zeigen Sie, dass die Bedingung $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$ (also (10.2c)) in der Definition eines Körperhomomorphismus auch durch $f(1_{K_1}) \neq 0_{K_2}$ ersetzt werden kann, also dass für Körper $(K_1, +_1, \cdot_1)$ und $(K_2, +_2, \cdot_2)$ sowie $f\colon K_1 \to K_2$ mit additiver und multiplikativer Strukturverträglichkeit ((10.2a) und (10.2b)) die Bedingung $f(1_{K_1}) \neq 0_{K_2}$ hinreichend für $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$ ist.

Hausaufgabe I-7.1 (Ringe und Unterringe) 3 + 1 = 4 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Ringe sind und ob diese kommutativ sind. Entscheiden Sie, ob die Ringe nullteilerfrei sind, und bestimmen Sie für die Ringe mit Eins die Charakteristik.

(i) $(\mathbb{Z}_3, +_2, \cdot_2)$ (ii) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$
(iii) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \triangle)$ (iv) $(\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$. Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ kommutativ ist.

Hausaufgabe I-7.2 (Nullteiler) 1 + 2 = 3 Punkte

(a) Untersuchen Sie, welche der Ringe aus Hausaufgabe I-7.1 Teilaufgabe (a) nullteilerfrei sind und ob es sich um Integritätsringe handelt.

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie Lemma 9.8, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen für $b \in R$:

(i) b ist kein Rechtsnullteiler von R.

(ii) Der Gruppenhomomorphismus $(R, +) \ni a \mapsto a \cdot b \in (R, +)$ ist injektiv.

(iii) Für alle $a, c \in R$ gilt: $a \cdot b = c \cdot b$ impliziert $a = c$.

Hausaufgabe I-7.3 (Ringhomomorphismen) 2 + 1 + 2 = 5 Punkte

(a) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe. Weiter sei $f\colon R_1 \longrightarrow R_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Lemma 9.22 des Skripts, also dass dann gilt:

(i) $\operatorname{Bild}(f)$ ist ein Unterring von $(R_2, +_2, \cdot_2)$.

(ii) $\operatorname{Kern}(f)$ ist ein Unterring von $(R_1, +_1, \cdot_1)$.

(b) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe mit den Nullelementen 0_{R_1} bzw. 0_{R_2}. Weiter sei $f\colon R_1 \longrightarrow R_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Lemma 9.24 des Skripts, also die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:

(i) f ist injektiv.

(ii) $\operatorname{Kern}(f) = \{0_{R_1}\}$.

(iii) Die einzige Lösung der Gleichung $f(a) = 0_{R_2}$ ist $a = 0_{R_1}$.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und $\operatorname{char}(R) = 0$. Zeigen Sie Lemma 9.20 des Skripts, also dass dann R einen Unterring enthält, der isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Hausaufgabe I-7.4 (Ideale und Faktorringe) 1.5 + 4 + 2.5 + 1 + 2 = 11 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Teilmengen des dazugehörigen Rings Ideale mit den entsprechenden Verknüpfungen bilden.

  (i) $\mathbb{N}$ in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

  (ii) Die geraden ganzen Zahlen in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

  (iii) $\mathcal{P}(Y)$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ für eine nichtleere Menge X und $Y \in \mathcal{P}(X)$

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $E \subseteq R$. Zeigen Sie die wesentliche Aussage von Satz 9.36, also

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \forall i = 1, \ldots, n \ (a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER) \right\}, \qquad (9.13a)$$

und beschreiben Sie kurz, warum und wie sich die Darstellung in kommutativen Ringen und in Ringen mit Eins vereinfachen lässt.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein unitärer, kommutativer Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

  (i) $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.

  (ii) $(R, +, \cdot)$ hat genau zwei Ideale, nämlich die trivialen, welche nicht übereinstimmen.

(d) Es sei X eine Menge und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie, dass der Faktorring $\mathcal{P}(X) / \mathcal{P}(Y)$ von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ isomorph zu $(\mathcal{P}(X \setminus Y), \triangle, \cap)$ ist.

(e) Bestimmen Sie ohne Beweis aber mit knapper Erklärung die unten stehenden erzeugten Ideale in den dazugehörigen Ringen und versuchen Sie, ein einzelnes Element des Rings zu bestimmen, dass schon das jeweilige Ideal erzeugt.

  (i) (A, B) für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$

  (ii) $(9, 15)$ in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Hausaufgabe I-7.5 (Körper und Körperhomomorphismen) 1 + 2 + 1 = 4 Punkte

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie, dass

$$(a - x) \cdot (b - x) = 0_K$$

genau dann gilt, wenn $x = a$ oder $x = b$ ist.

(b) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit $\operatorname{char}(K) = 0$. Zeigen Sie Lemma 10.16, also dass dann K einen Unterkörper enthält, der isomorph zu $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass kein endlicher Körper geordnet werden kann.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.