R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 7 (Lösung)

Ausgabedatum: 24. November 2025
Abgabedatum: 1. Dezember 2025

Übungsaufgabe I-7.1. (Ringe und Unterringe)

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Ringe sind und ob diese kommutativ sind. Bestimmen Sie für die Ringe mit Eins die Charakteristik.

(i) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cup)$ (ii) $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$
(iii) $(\mathbb{Z}, +, \max(\cdot, \cdot))$ (iv) $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$

(b) Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass der Endomorphismenring $(\operatorname{End}(G), +, \circ)$ (Beispiel 9.2 des Skripts) tatsächlich ein Ring ist.

(c) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $((R_i, +, \cdot))_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterringen. Zeigen Sie Lemma 9.16, also dass $\bigcap_{i \in I} R_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterring von $(R, +, \cdot)$ ist.

(d) Belegen Sie mit einem Beispiel, dass die Vereinigung zweier Unterringe eines Rings im Allgemeinen kein Unterring ist.

Lösung.

(a) (i) Wir wissen aus Hausaufgabe I-5.1, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\emptyset$ und $(\mathcal{P}(X), \cup)$ ein kommutatives Monoid mit neutralem Element $\emptyset$ ist. Auf Grund der Kommutativität müssen wir nur eines der beiden Distributivgesetze prüfen. Die Distributivgesetze gelten allerdings nicht. In unserem konkreten Fall schreibt sich für alle $a, b, c \in \mathcal{P}(X)$ das Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \tag{9.1a}$$

als

$$a \cup (b \triangle c) = (a \cup b) \triangle (a \cup c).$$

Während a immer Teilmenge des linken Ausdrucks ist, ist a nie Teilmenge des rechten Ausdrucks, ein einfaches Gegenbeispiel liefert also $a = X, b = c = \emptyset$, denn dann ist

$$a \cup (b \triangle c) = X \cup (\emptyset \triangle \emptyset) = X \neq \emptyset = (X \cup \emptyset) \triangle (X \cup \emptyset) = (a \cup b) \triangle (a \cup c).$$

Es handelt sich also um **keinen Ring**.

(ii) Wir wissen aus Hausaufgabe I-5.1 , dass $(\mathcal{P}(X), \cup)$ lediglich eine Halbgruppe bildet, entsprechend kann es sich hier nicht um einen Ring handeln.

(iii) Es ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine schon bekannte abelsche Gruppe (Beispiel 7.29 des Skripts) und $\big(\mathbb{Z}, \max(\cdot,\cdot)\big)$ eine kommutative Halbgruppe ohne neutrales Element. Die Assoziativität des Maximums auf $\mathbb{Z}$ sieht man daran, dass für drei Elemente unabhängig von der Verknüpfungsreihenfolge immer ein Größtes ausgegeben wird. Nun ist für $a = 1$ und $b = c = 0$ aber

$$\max(a, b + c) = \max(1, 0) = 1 \neq 2 = \max(1, 0) + \max(1, 0) = \max(a, b) + \max(a, c),$$

die Distributivgesetze gelten also nicht und somit liegt **kein Ring** vor.

(iv) Hierbei handelt es sich um einen **kommutativen Ring mit Eins**, nämlich der konstanten Einsfunktion, wobei alle benötigten Eigenschaften von dem Ring $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ übertragen werden. Die Charakteristik überträgt sich aus der Charakteristik der reellen Zahlen, ist also 0.

(b) Laut Skript ist

$$\operatorname{End}(G) \coloneqq \{f \colon G \to G \mid f \text{ ist Endomorphismus}\}, \tag{9.2}$$

wobei die Endomorphismen die Homomorphismen mit dem speziellen Definitions- und Bildbereich sind, und wir statten $\operatorname{End}(G)$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon \operatorname{End}(G) \times \operatorname{End}(G) &\to \operatorname{End}(G) \quad \text{mit } (f, g) \mapsto f + g, \text{definiert durch } (f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x) \\ \circ\colon \operatorname{End}(G) \times \operatorname{End}(G) &\to \operatorname{End}(G) \quad \text{mit } (f, g) \mapsto f \circ g, \text{definiert durch } (f \circ g)(x) \coloneqq f(g(x)) \end{aligned}$$

aus. Wir wissen bereits, dass $(G^G, +)$ **eine abelsche Gruppe** ist, weil die entsprechenden punktweisen Eigenschaften von $+\colon G \times G \to G$ an $+\colon G^G \times G^G \to G^G$ vererbt werden. Ebenso wissen wir aus Hausaufgabe I-5.1 , dass $(G^G, \circ)$ ein (i. A. nichtkommutativer) **Monoid mit Eins**, nämlich der Identitätsabbildung) ist. Diese Eigenschaften bleiben erhalten, wenn wir uns auf Homomorphismen einschränken, da die punktweise Verknüpfung (hier Summe) und die Komposition von Homomorphismen wieder ein Homomorphismus ist, sowohl für Monoide, als auch für Gruppen, denn in beiden Fällen ist

$$(f + g)(a + b) = f(a + b) + g(a + b) = f(a) + f(b) + g(a) + g(b) = (f + g)(a) + (f + g)(b)$$

und wegen der Strukturverträglichkeit

$$(f \circ g)(a+b) = f(g(a+b)) = f(g(a)+g(b)) = f(g(a))+f(g(b)) = (f \circ g)(a)+(f \circ g)(b).$$

Nun ist zudem wieder wegen der Strukturverträglichkeit von f für alle $a \in G$:

$$(f \circ (g+h))(a) = f((g+h)(a)) = f(g(a)+h(a)) = f(g(a))+f(h(a)) = (f \circ g+f \circ h)(a),$$

und

$$((g+h) \circ f)(a) = (g+h)(f(a)) = g(f(a)) + h(f(a)) = ((g \circ f + h \circ f))(a)$$

es gelten also die Distributivgesetzte und es liegt ein **Ring mit Eins** vor.

(c) Aus Hausaufgabe I-5.4 wissen wir, dass $\bigcap_{i \in I} R_i$ mit $+$ eine (abelsche) Untergruppe von $(R, +)$ bildet. Für $a, b \in \bigcap_{i \in I} R_i$ ist also $a, b \in R_i$ für alle $i \in I$ und wegen der Unterringeigenschaft jedes R_i sind diese bzgl. $\cdot$ auch abgeschlossen, also $a \cdot b \in R_i$ für alle $i \in I$. Also ist auch $\bigcap_{i \in I} R_i$ bzgl. $\cdot$ abgeschlossen und damit $(\bigcap_{i \in I} R_i, +, \cdot)$ ein Unterring von $(R, +, \cdot)$. Die Distributivgesetze gelten für alle Kombinationen von Elementen im Oberring und damit auch für jede beliebige Teilmenge.

(d) Die Unterringe $2\mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ beinhalten die Elemente 2 bzw. 3, deren additive Verknüpfung 5 ist, was in keinem der beiden Unterringe und damit nicht in der Vereinigung enthalten ist. Hier wurde keine multiplikative Eigenschaft verwendet, allein das Untergruppenverhalten in der additiven Gruppe genügt.

Übungsaufgabe I-7.2. (Nullteiler)

(a) Untersuchen Sie, welche der Ringe aus Übungsaufgabe I-7.1 Teilaufgabe (a) nullteilerfrei sind, und ob es sich um Integritätsringe handelt.

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie Lemma 9.8, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen für $a \in R$:

  (i) a ist kein Linksnullteiler von R.

  (ii) Der Gruppenhomomorphismus $(R, +) \ni b \mapsto a \cdot b \in (R, +)$ ist injektiv.

  (iii) Für alle $b, c \in R$ gilt: $a \cdot b = a \cdot c$ impliziert $b = c$.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{char}(R)$ eine Primzahl oder 0 ist.

(d) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring und S ein Unterring von R, der kein Nullring ist und eine Eins besitzt. Zeigen Sie, dass dann schon $1_R = 1_S$ gilt.

Lösung.

(a) In Teilaufgabe (iv) ist das neutrale Element bzgl. + die konstante Nullfunktion. Es handelt sich nicht um den Nullring (denn die Eins und die Null sind verschieden). Sind $f, g \in \mathbb{R}^X$ mit $f \cdot g = 0$ dann gilt $f(x) = 0 \vee g(x) = 0$ für alle $x \in X$. Damit ist der Ring genau dann nullteilerfrei, wenn X ein einziges Element beinhaltet, denn dann muss eine der beiden Funktionen die konstante Nullfunktion sein. Dann handelt es sich auch um einen **Integritätsring**. Sobald X zwei verschiedene Elemente x_1, x_2 enthält, kann man allerdings die Funktionen

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & x = x_1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & x = x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angeben, für die $f \cdot g = 0$ aber $f \neq 0 \neq g$.

(b) $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Dass a kein Linksnullteiler von R ist, ist per Definition genau dann der Fall, wenn kein $b \in R$ existiert, so dass $a \cdot b = 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der Kern des angegebenen Gruppenhomomorphismus trivial ist und damit, genau dann wenn dieser injektiv ist.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$: Für beliebige b und c aus R ist die Gleichung $a \cdot b = a \cdot c$ durch Subtraktion und Anwendung des Distributivgesetztes äquivalent umformbar zu $a \cdot (b - c) = 0_R$. Ist a kein Linksnullteiler, dann kann das nur erfüllt sein, wenn $b = c$ ist. Gilt andererseits $a \cdot (b - c) = 0_R$ nur für $b = c$, dann ist $a \cdot b = a \cdot (b - 0_R)$ nur dann 0_R, wenn $b = 0_R$ ist, und a damit kein Linksnullteiler.

(c) Per Definition ist ein Integritätsring ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Einselement ungleich dem Nullring. In einem Integritätsring ist $0_R \neq 1_R$ also $\operatorname{char}(R) \neq 1$. Angenommen es wäre $\operatorname{char}(R)$ nun eine nicht prime Zahl ungleich 1. Dann gibt es $n, m \in [\![2, \operatorname{char}(R) - 1]\!]$ mit $\operatorname{char}(R) = nm$, und somit wegen der Distributivgesetze

$$(n1_R) \cdot (m1_R) = (nm)1_R = 0_R.$$

Da der Integritätsring nullteilerfrei ist, muss $n1_R$ oder $m1_R$ mit 0_R übereinstimmen, im Widerspruch dazu, dass $n, m < \operatorname{char}(R)$.

(d) Es ist

$$1_S \cdot_R 1_S = 1_S \cdot_S 1_S = 1_S = 1_S \cdot_R 1_R$$

und da nach Voraussetzung $1_S \neq 0_S = 0_R$ liefert Kürzen, dass $1_S = 1_R$.

Übungsaufgabe I-7.3. (Ringhomomorphismen)

(a) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ zwei Ringe und $f \colon R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Besitzen die Ringe die Einselemente 1_{R_1} respektive 1_{R_2}, dann fordern wir zusätzlich die Bedingung $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ in Gleichung (9.5c) um f einen Homomorphismus von Ringen mit Eins zu nennen. Zeigen Sie, dass diese Bedingung äquivalent zu $1_{R_2} \in \operatorname{Bild}(f)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für jeden Ring $(R, +, \cdot)$ mit 1_R genau einen Ringhomomorphismus $f\colon (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (R, +, \cdot)$ von Ringen mit Eins gibt.

Lösung.

(a) Klar ist, dass $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ auch $1_{R_2} \in \operatorname{Bild}(f) = f(R_1)$ bedeutet. Ist andererseits nur $1_{R_2} \in \operatorname{Bild}(f) = f(R_1)$, dann gibt es ein $r \in R_1$ mit $f(r) = 1_{R_2}$ und es ist

$$1_{R_2} = f(r) = f(r \cdot_1 1_{R_1}) = f(r) \cdot_2 f(1_{R_1}) = 1_{R_2} \cdot_2 f(1_{R_1}) = f(1_{R_1}).$$

(b) Zur Erinnerung, in einer Gruppe $(G, +)$ können wir für beliebige Elemente a die Abkürzung $\underbrace{a + \cdots + a}_{z\text{-mal}} = za$ schreiben, dabei ist $z \in \mathbb{Z}$. Dabei taucht also eine ganze Zahl aus dem Zählbereich auf, die angibt, wie oft summiert wurde. In dieser Teilaufgabe sind die ganzen Zahlen, die dem Zählbereich entspringen, rot markiert. Für einen Ringhomomorphismus erhält man durch mehrfache Anwendung der Strukturerhaltung auch

$$f(za) = f(a + \cdots + a) = \underbrace{f(a) + \cdots + f(a)}_{z\text{-mal}} = zf(a).$$

Der Knackpunkt dieser Aufgabe ist jetzt, dass $\mathbb{Z}$ zyklisch ist und von der 1 additiv erzeugt wird, was die Funktionswerte von Ringhomomorphismen schon eindeutig festlegt. Sei nämlich $f\colon (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (R, +, \cdot)$ ein Ringhomomorphismus, für den nach Definition $f(1) = 1_R$ gilt, und $z \in \mathbb{Z}$. Dann muss

$$f(z) \overset{\text{zyklisch erz.}}{=} f(z1) = zf(1) = z1_R$$

gelten, was f eindeutig festgelegt.

Tatsächlich ist diese Abbildung auch ein Ringhomomorphismus, denn für $y, z \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} f(y + z) &= (y + z)1_R = y1_R + z1_R &&= f(y) + f(z) \\ f(y \cdot z) &= (y \cdot z)1_R \overset{\text{Distrib.}}{=} (y1_R) \cdot (z1_R) &&= f(y) \cdot f(z), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Distributivgesetze eingeflossen sind, und natürlich ist $f(1) = 1_R$.

Übungsaufgabe I-7.4. (Ideale und Faktorringe)

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Teilmengen des dazugehörigen Rings Ideale mit den entsprechenden Verknüpfungen bilden.

(i) Die ungeraden ganzen Zahlen in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(ii) $\{f \circ g \mid f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}), f \text{ invertierbar}\}$ in dem Gruppenendomorphismenring $(\mathrm{End}(\mathbb{Q}), +, \circ)$

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie Lemma 9.34, also dass wenn $(J_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine Familie von Idealen mit nichtleerer Indexmenge I ist, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} J_i$ ein Ideal in R.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und J ein Ideal in R. Zeigen Sie, dass wenn $1_R \in J$ ist, dann ist $J = R$.

(d) Bestimmen Sie ohne Beweis aber mit knapper Erklärung die unten stehenden erzeugten Ideale in den dazugehörigen Ringen

(i) $(\sqrt{2})$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(ii) (A) für $A \in \mathcal{P}(X)$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$

Lösung.

(a) (i) Die ungeraden ganzen Zahlen sind genau die Menge $2\mathbb{Z} + 1$ und damit nicht einmal ein Unterring, denn die 0 liegt nicht in dieser Menge, damit kann es sich nicht um eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ handeln, und damit liegt **kein Ideal** vor.

(ii) Da die Identität ein Endomorphismus ist können wir jedes $g \in \mathrm{End}(\mathbb{Q})$ als $g = \mathrm{id} \circ g$ schreiben, damit handelt es sich bei der Menge um den Endomorphismenring $(\mathrm{End}(\mathbb{Q}), +, \circ)$ selbst, welcher offensichtlich **ein Ideal** bildet.

(b) Aus Übungsaufgabe I-7.1 wissen wir, dass der beliebige nichtleere Schnitt von Unterringen wieder ein Unterring ist. Ist nun $a \in R$, dann ist wegen der Idealeigenschaft aller J_i, $i \in I$:

$$a \cdot \left(\bigcap_{i \in I} J_i \right) = \{ \underbrace{a \cdot j}_{\in J_i \forall i \in I} \mid j \in J_i \, \forall i \in I \} \subseteq \{ j \mid j \in J_i \, \forall i \in I \} = \bigcap_{i \in I} J_i$$

und die rechtsseitige Eigenschaft folgt analog.

(c) Per Definition des Ideals und der Eins ist

$$R \supseteq J \supseteq R \cdot J \supseteq R \cdot \{1_R\} = R$$

und damit $J = R$.

(d) (i) Hauptideale zu nicht-Null-Elementen in Körpern gerade der Körper selbst, siehe Hausaufgabe I-7.4 daher ist $(\sqrt{2}) = \mathbb{R}$.

(ii) Es ist $(A) = \mathcal{P}(A)$. Sowohl Unterring- als auch Idealzusatzeigenschaft folgen aus der verkleinernden Eigenschaft des Schnitts, also dass $A \cap C = C \cap A \subseteq A$ für beliebige

$C \in \mathcal{P}(X)$. Alternativ sieht man das anhand der Darstellung aus Satz 9.36, denn der Ring ist unitär und kommutativ und jedes Element ist additiv selbstinvers, also ist

$$(A) = \left\{ B \cap A \,\middle|\, B \in \mathcal{P}(X) \right\} = \mathcal{P}(A).$$

Übungsaufgabe I-7.5. (Körper und Körperhomomorphismen)

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x \cdot x = x$ in K.

(b) Zeigen Sie, dass die Bedingung $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$ (also (10.2c)) in der Definition eines Körperhomomorphismus auch durch $f(1_{K_1}) \neq 0_{K_2}$ ersetzt werden kann, also dass für Körper $(K_1, +_1, \cdot_1)$ und $(K_2, +_2, \cdot_2)$ sowie $f\colon K_1 \to K_2$ mit additiver und multiplikativer Strukturverträglichkeit ((10.2a) und (10.2b)) die Bedingung $f(1_{K_1}) \neq 0_{K_2}$ hinreichend für $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$ ist.

Lösung.

(a) Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann enthält K die zwei verschiedenen Elemente 1_K und 0_K. Für beide gilt die Beziehung $x \cdot x = x$ (0.1). Angenommen, es gäbe ein weiteres Element $x \in K \setminus \{0_K, 1_K\}$ mit $x \cdot x = x$, dann ist x multiplikativ invertierbar und wenn wir x^{-1} an die obige Gleichung multiplizieren, dann ergibt sich $x = 1_K$ und damit ein Widerspruch. Man kann auch analog über die Kürzungsregeln argumentieren.

(b) Es ist

$$f(1_{K_1}) = f(1_{K_1} \cdot_1 1_{K_1}) = f(1_{K_1}) \cdot_2 f(1_{K_1}),$$

und die Anwendung der Kürzungsregeln (da $f(1_{K_1}) \neq 0_K$) liefert $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$.

Hausaufgabe I-7.1 (Ringe und Unterringe) 3 + 1 = 4 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Ringe sind und ob diese kommutativ sind. Entscheiden Sie, ob die Ringe nullteilerfrei sind, und bestimmen Sie für die Ringe mit Eins die Charakteristik.

(i) $(\mathbb{Z}_3, +_2, \cdot_2)$
(ii) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$
(iii) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \triangle)$
(iv) $(\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$. Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ kommutativ ist.

Lösung.

(a) (i) Bei $(\mathbb{Z}_3, +_2, \cdot_2)$ sind beide Abbildungen auf $\mathbb{Z}_3$ assoziative Verknüpfungen, es handelt sich also um zwei Halbgruppen. Allerdings ist weder $(\mathbb{Z}_3, +_2)$ noch $(\mathbb{Z}_3, \cdot_2)$ ein Monoid, denn $0 + 2 \mod 2 = 1 \cdot 2 \mod 2 = 0$. Hier liegt also **kein Ring** vor. (0.5 Punkte)

(ii) Bei $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ wissen wir bereits, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\emptyset$ und $(\mathcal{P}(X), \cap)$ ein kommutatives Monoid mit neutralem Element X ist. Auf Grund der Kommutativität müssen wir nur eines der beiden Distributivgesetze prüfen. In diesem Fall erhalten wir für alle $a, b, c \in \mathcal{P}(X)$ das Distributivgesetz

$$\begin{aligned}
A \cap (B \triangle C) &= A \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) \\
&= \Big(A \cap (B \setminus C)\Big) \qquad \cup \Big(A \cap (C \setminus B)\Big) \\
&= \Big((A \cap B) \setminus C\Big) \qquad \cup \Big((A \cap C) \setminus B\Big) \\
&= \Big((A \cap B) \setminus (A \cap C)\Big) \cup \Big((A \cap C) \setminus (A \cap B)\Big) \\
&= (A \cap B) \triangle (A \cap C).
\end{aligned}$$

Hier liegt als ein **kommutativer Ring** mit **Eins** vor (nämlich das Element X). Da alle Elemente additiv selbstinvers sind ist die Charakteristik hier 2. (1 Punkt)

(iii) Bei $(\mathcal{P}(X), \triangle, \triangle)$ handelt es sich mit beiden Verknüpfungen um eine uns bekannte Gruppe. Es gilt also die Distributivitätsgesetze zu prüfen, da sehen wir jedoch, dass

$$X \triangle (X \triangle X) = X \triangle \emptyset = X \neq \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = (X \triangle X) \triangle (X \triangle X),$$

womit **kein Ring** vorliegt. (1 Punkt)

(iv) Bei $(\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ liefern die beiden assoziativen Verknüpfungen eine additive, kommutative Gruppe (mit der Nullfunktion als Null) und eine multiplikative Halbgruppe. Die

Halbgruppe besitzt jedoch kein neutrales Element, denn es existieren überabzählbar viele linksneutrale Elemente, nämlich z. B. die Familie

$$f_r(x) \coloneqq \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ r, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

für die Indexmenge $r \in \mathbb{R}$.

Außerdem gelten die Distributivgesetze nicht, denn z. B. für $f \equiv 1$ und $g, h \equiv 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(f \circ (g + h))(x) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x).$$

Hier liegt also **kein Ring** vor. (0.5 Punkte)

(b) Für a, b aus R ist

$$(a + b) = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b + b \cdot a = a + b + a \cdot b + b \cdot a \Rightarrow a \cdot b = -(b \cdot a)$$

Nun ist aber für jedes beliebige c aus R auch

$$(c + c) = (c + c) \cdot (c + c) = 4(c \cdot c) = 2(c + c) \Rightarrow c + c = 0,$$

also jedes Element sein eigenes, additives Inverses, entsprechend ist auch $a \cdot b = b \cdot a$. (1 Punkt)

Hausaufgabe I-7.2 (Nullteiler) 1 + 2 = 3 Punkte

(a) Untersuchen Sie, welche der Ringe aus Hausaufgabe I-7.1 Teilaufgabe (a) nullteilerfrei sind und ob es sich um Integritätsringe handelt.

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie Lemma 9.8, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen für $b \in R$:

 (i) b ist kein Rechtsnullteiler von R.

 (ii) Der Gruppenhomomorphismus $(R, +) \ni a \mapsto a \cdot b \in (R, +)$ ist injektiv.

 (iii) Für alle $a, c \in R$ gilt: $a \cdot b = c \cdot b$ impliziert $a = c$.

Lösung.

(a) In Teilaufgabe (ii) ist $A \cap B = \emptyset$ genau dann, wenn die Mengen in dem Komplement der jeweils anderen liegen, die Mengen also disjunkt sind. I. A. ist dieser Ring also **nicht nullteilerfrei** und damit **kein Integritätsring**. Nullteilerfrei ist der Ring genau dann, wenn X kein, oder nur ein Element enthält. Ist X leer, dann handelt es sich um den **Nullring** (dieser Fall war auch ausgeschlossen in der Voraussetzung). Besteht X aus genau einem Element, dann handelt es sich sogar um einen **Integritätsring** (1 Punkt)

(b) $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Dass b kein Rechtsnullteiler von R ist, ist per Definition genau dann der Fall, wenn kein $a \in R$ existiert, so dass $a \cdot b = 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der Kern des angegebenen Gruppenhomomorphismus trivial ist und damit, genau dann wenn dieser injektiv ist. (1 Punkt)

$(i) \Leftrightarrow (iii)$: Für beliebige a und c aus R ist die Gleichung $a \cdot b = c \cdot b$ durch Subtraktion und Anwendung des Distributivgesetztes äquivalent umformbar zu $a \cdot (b - c) = 0_R$. Ist b kein Rechtsnullteiler, dann kann das nur erfüllt sein, wenn $a = c$ ist. Gilt andererseits $(a - c) \cdot b = 0_R$ nur für $a = c$, dann ist $a \cdot b = (a - 0_R) \cdot b$ nur dann 0_R, wenn $a = 0_R$ ist, und b damit kein Rechtsnullteiler. (1 Punkt)

Hausaufgabe I-7.3 (Ringhomomorphismen) 2 + 1 + 2 = 5 Punkte

(a) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe. Weiter sei $f \colon R_1 \to R_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Lemma 9.22 des Skripts, also dass dann gilt:

 (i) $\operatorname{Bild}(f)$ ist ein Unterring von $(R_2, +_2, \cdot_2)$.

 (ii) $\operatorname{Kern}(f)$ ist ein Unterring von $(R_1, +_1, \cdot_1)$.

(b) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe mit den Nullelementen 0_{R_1} bzw. 0_{R_2}. Weiter sei $f \colon R_1 \to R_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Lemma 9.24 des Skripts, also die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:

 (i) f ist injektiv.

 (ii) $\operatorname{Kern}(f) = \{0_{R_1}\}$.

 (iii) Die einzige Lösung der Gleichung $f(a) = 0_{R_2}$ ist $a = 0_{R_1}$.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und $\operatorname{char}(R) = 0$. Zeigen Sie Lemma 9.20 des Skripts, also dass dann R einen Unterring enthält, der isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Lösung.

(a) Die Distributivgesetze gelten für alle Kombinationen von Elementen in den Oberringen und damit auch für jede beliebige Teilmenge.

Dass $f \colon R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus ist, bedeutet insbesondere, dass f auch ein entsprechender Gruppenhomomorphismus für die Mengen mit der additive Verknüpfung ist. Aus Lemma 8.11 wissen wir dann, dass $\operatorname{Bild}(f)$ mit $+_2$ eine Untergruppe von $(R_2, +_2)$ und $\operatorname{Kern}(f)$ mit $+_1$ eine Untergruppe von $(R_1, +_1)$ ist. (1 Punkt)

Wegen der multiplikativen Strukturverträglichkeit des Ringhomomorphismus ist für $a, b \in R_1$

$$f(a) \cdot_2 f(b) = f(\underbrace{a \cdot_1 b}_{\in R_1})$$

und damit $\operatorname{Bild}(f)$ abgeschlossen unter $+_2$, also $\operatorname{Bild}(f)$ mit $+_2, \cdot_2$ ein Unterring von $(R_2, +_2, \cdot_2)$ im Kontext von Ringen ohne Einselement. (0.5 Punkte)

Außerdem ist für $a, b \in \operatorname{Kern}(f)$

$$f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b) = 0_{R_2} \cdot_2 0_{R_2} = 0_{R_2}$$

und damit $\operatorname{Kern}(f)$ bzgl. $\cdot_1$ abgeschlossen, also mit $+_1, \cdot_1$ ein Unterring von $(R_2, +_1, \cdot_1)$ im Kontext von Ringen ohne Einselement. (0.5 Punkte)

(b) Die Äquivalenz $(i) \Leftrightarrow (ii)$ gilt schon weil der Ringhomomorphismus ein Gruppenhomomorphismus für den additiven Teil des Rings ist, siehe Lemma 8.13.

Die Definition des Kerns liefert gerade die Äquivalenz $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. (1 Punkt)

(c) Der Unterring ist gerade die von 1_R erzeugte additive Untergruppe $\langle 1_R \rangle$. Diese ist offensichtlich eine Untergruppe des additiven Ringanteils und auf Grund der Distributivgesetze auch ein Unterring.

In Übungsaufgabe I-7.3 haben wir gesehen, dass es nur einen Homomorphismus von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nach $(R, +, \cdot)$ (im Kontext von Homomorphismen mit Eins) geben kann und dass dieser genau nach $\langle 1_R \rangle$ abbildet mit $f(z) = f(z 1_{\mathbb{Z}}) = z f(1_{\mathbb{Z}}) = z 1_R$, woran wir auch sofort dessen Surjektivität ablesen können. Die Injektivität folgt aus der Charakteristik, denn der Kern ist gerade gegeben durch

$$\{z \mid z \in \mathbb{Z},\ z 1_R = 0_R\}$$

und damit durch alle ganzzahligen Vielfachen der Charakteristik. (2 Punkte)

Hausaufgabe I-7.4 (Ideale und Faktorringe) 1.5 + 4 + 2.5 + 1 + 2 = 11 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Teilmengen des dazugehörigen Rings Ideale mit den entsprechenden Verknüpfungen bilden.

(i) $\mathbb{N}$ in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(ii) Die geraden ganzen Zahlen in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(iii) $\mathcal{P}(Y)$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ für eine nichtleere Menge X und $Y \in \mathcal{P}(X)$

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $E \subseteq R$. Zeigen Sie die wesentliche Aussage von Satz 9.36, also

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0\ \forall i = 1, \dots, n\ (a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER) \right\}, \qquad (9.13a)$$

und beschreiben Sie kurz, warum und wie sich die Darstellung in kommutativen Ringen und in Ringen mit Eins vereinfachen lässt.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein unitärer, kommutativer Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

  (i) $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.

  (ii) $(R, +, \cdot)$ hat genau zwei Ideale, nämlich die trivialen, welche nicht übereinstimmen.

(d) Es sei X eine Menge und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie, dass der Faktorring $\mathcal{P}(X) / \mathcal{P}(Y)$ von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ isomorph zu $(\mathcal{P}(X \setminus Y), \triangle, \cap)$ ist.

(e) Bestimmen Sie ohne Beweis aber mit knapper Erklärung die unten stehenden erzeugten Ideale in den dazugehörigen Ringen und versuchen Sie, ein einzelnes Element des Rings zu bestimmen, dass schon das jeweilige Ideal erzeugt.

  (i) (A, B) für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$

  (ii) $(9, 15)$ in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Lösung.

(a) (i) $\mathbb{N}$ ist in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **kein Ideal**, die natürlichen Zahlen bilden nicht einmal einen Unterring, denn sie enthalten die 0 nicht. Außerdem ist die Idealzusatzbedingung nicht erfüllt, denn es ist $\mathbb{N} \cdot (-1) \not\subseteq \mathbb{N}$. (0.5 Punkte)

  (ii) Die geraden ganzen Zahlen lassen sich gerade als $2\mathbb{Z}$ schreiben. Sie bilden einen Unterring von $(Z, +, \cdot)$, denn $2\mathbb{Z}$ bildet eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Das können wir mit dem Untergruppenkriterium nachprüfen. Nichtleerheit der Menge ist klar und $2z_1 - 2z_2 = 2(z_1 - z_2) \in 2\mathbb{Z}$. Die Abgeschlossenheit unter der Multiplikation erledigen wir gleichzeitig mit der zusätzlichen Idealeigenschaft, es ist nämlich wegen der Assoziativität und Kommutativität

$$(2 \cdot z_2) \cdot z_1 = z_1 \cdot (2 \cdot z_2) = 2 \cdot (z_1 \cdot z_2) \in 2\mathbb{Z}$$

und da der Ring kommutativ ist stimmt die linksseitige Bedingung mit der rechtsseitigen überein. Hier handelt es sich also um **ein Ideal**. (0.5 Punkte)

  (iii) Hier handelt es sich um einen Unterring von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, denn $\emptyset$ liegt in der Menge und jedes Element ist additiv selbstinvers, also ist

$$A_1 \triangle A_2' = A_1 \triangle A_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \subseteq B$$

und nach dem Untergruppenkriterium liegt also eine Untergruppe von $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ vor. Außerdem ist die Menge multiplikativ abgeschlossen, nicht nur in sich, sondern auch bezüglich der Multiplikation mit beliebigen anderen Elementen $C \in \mathcal{P}(X)$, denn

$$A \cap C \subseteq A \subseteq B$$

was wieder zugleich die Idealeigenschaft zeigt, denn der Ring ist kommutativ, hier liegt also **ein Ideal** vor. (0.5 Punkte)

(b) Wir wählen die Bezeichnung

$$J \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \forall i = 1, \ldots, n \ (a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER) \right\}$$

für diese Teilaufgabe.

Wir zeigen nun im ersten Schritt, dass $(E) \supseteq J$. Da (E) ein Ideal ist, ist es eine additive Untergruppe, daher enthält es neben E auch E'. Auf Grund der Zusatzeigenschaft der Idealdefinition beinhaltet (E) auch die Mengen RE und ER. All diese Mengen können wir also auch nochmal von der jeweils anderen Seite mit R verknüpfen um $RER \subseteq (E)$ zu erhalten. Endliche Summen dieser Elemente liegen wegen der Untergruppeneigenschaft on (E) wieder in (E), also ist $(E) \supseteq J$. (1 Punkt)

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass $(E) \subseteq J$ indem wir zeigen, dass J ein Ideal ist, dass E enthält. Die Obermengeneigenschaft $J \supseteq E$ ist dabei klar, denn für $n = 1$ können wir a_1 ja aus E wählen. Dass J eine additive Untergruppe von $(R, +)$ ist, folgt mit dem Untergruppenkriterium. Für $n = 0$ ist die Summe in der Darstellung von E leer also $0 \in R$, damit ist J nicht leer. Für zwei Elemente $\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{j=1}^{m} b_j$ aus J ist außerdem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \right) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i$$

für $c_i = a_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $c_i = b_{i-n}$ für $i > n$. Es gilt also für die Familie $(c_i)_{i=1,\ldots,n+m}$ nur den hinteren Teil zu untersuchen, also die Frage zu klären, ob $-b_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER$, wenn dies für die b_i gilt. Ist b_i in E oder $-E$, dann ist das offensichtlich. Anderenfalls folgt die Eigenschaft aus den Distributivgesetzen, denn es ist z. B. für $b_i = r\, e\, \tilde{r} \in RER$

$$-b_i = -(r\, e\, \tilde{r}) = (-r)\, e\, \tilde{r} = r\, e(-\tilde{r}) \in RER.$$

Wie immer müssen wir die multiplikative Abgeschlosenheit von J bezüglich sich selbst nicht prüfen, denn wir müssen sie ja sogar für Multiplikation mit jedem Ringelement prüfen. Sei also $a \in R$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i \in J$. Dann ist

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a \cdot a_i$$

und $a \cdot a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER$ folgt aus der multiplikativen Assoziativität, denn es ist z. B. für $a_i = r\, e\tilde{r} \in RER$:

$$a \cdot a_i = a\,(r\, e\, \tilde{r}) = (a\, r)\,(e\, \tilde{r}) \in RER.$$

(2 Punkte)

In kommutativen Ringen ist $ER = RE \supseteq RER$ und in Ringen mit Eins ist $E, -E \subseteq RE \subseteq RER$ und $ER \subseteq RER$, wodurch sich in der endlichen Summe die Summanden auf eine entsprechende kürzere Darstellung der Mengenvereinigung einschränken lassen. Die kürzeste Darstellung ergibt sich bei kommutativen Ringen mit 1, hier reicht es, die Summanden aus ER oder RE zu wählen. (1 Punkt)

(c) Wir starten mit der Hinrichtung, dafür sei also $(R, +, \cdot)$ ein Körper und J ein Ideal in R, das nicht das Nullideal ist. Dann existiert $a \in J \setminus \{0\}$. Wegen der Idealeigenschaft ist $R \cdot a \subseteq R \cdot J \subseteq J$ und da $a^{-1} \in R$ ist, ist auch $1 \in J$. Damit muss aber $R = R \cdot 1 \subseteq R \cdot J \subseteq J \subseteq R$ sein und damit $J = R$. (1 Punkt)

Sei nun R ein Ring mit genau zwei Idealen, dann ist er insbesondere nicht der Nullring, da dieser nur ein Ideal (sich selbst) besitzt. Da der Ring unitär und nicht der Nullring ist, muss er zumindest die ungleichen Elemente $0 \neq 1$ enthalten. Wären nur diese beiden Elemente enthalten, würde es sich bis auf Isomorphie um $\mathbb{Z}_2$ handeln und damit um einen Körper. Anderenfalls gibt es ein weiteres Element $a \in R \setminus \{0, 1\}$ und es ist für jedes solcher Elemente

$$(a) = R,$$

da das erzeugte Ideal immer die Menge selbst enthält und damit nicht nur das Nullideal sein kann. (0.5 Punkte)

Aus der Kommutativität und Existenz der Eins des Rings folgt nun, dass

$$R = (a) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; (a_i \in \underbrace{\{\pm a\}}_{\in R\,a} \cup R\,a \cup \underbrace{a\,R}_{=R\,a} \cup \underbrace{R\,a\,R}_{=R\,a}) \right\}$$

also, dass für geeignete Ringelemente r_i gilt, dass $1_R = \sum_{i=1}^{n} (r_i a) = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \right) a$, und damit existieren die multiplikativ inversen Elemente für jedes nicht Null Element. Damit handelt es sich um einen Körper. (1 Punkt)

(d) Wir haben schon in Aufgabenteil (a) gesehen, dass $\mathcal{P}(Y)$ tatsächlich ein Ideal ist. Genauer gesagt ist es sogar der Kern der Abbildung $f \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X \setminus Y)$ mit $f(A) \coloneqq A \cap X \setminus Y$, also der Multiplikation mit einem festen Ringelement, was wegen der Distributivgesetze und der Assoziativität der Multiplikation ein Ringhomomorphismus ist. Der Homomorphiesatz Satz 9.38 für Ringe liefert direkt die Isomorphie. (1 Punkt)

(e) (i) Wieder nutzen wir die Darstellung aus Satz 9.36 für den unitären und kommutativen Ring und erhalten wegen den kontraktiven Eigenschaften der symmetrischen Differenz und des Mengenschnitts

$$(A, B) = \mathcal{P}(A \cup B) = (A \cup B),$$

wobei die zweite Gleichung direkt aus Übungsaufgabe I-7.4 folgt und die erste daraus folgt, dass $\mathcal{P}(A \cup B)$ ein Oberideal von $\{A, B\}$ ist und jedes Element $C \in \mathcal{P}(A \cup B)$ durch $(C \cap B) \setminus A \triangle C \cap A$ erzeugt werden kann. (1 Punkt)

(ii) Es ist $(9, 15) = (3) = 3\mathbb{Z}$. Elemente aus $9\mathbb{Z}$ und $15\mathbb{Z}$ sind entweder gleich oder haben mindestens den Abstand des größten gemeinsamen Teilers 3 und für $2 \cdot 9 = 18$ und $1 \cdot 15$ wird dieser Abstand auch erreicht, das Element $3 = 18 - 15$ liegt also auch im erzeugten Ideal und damit auch das von 3 erzeugte Ideal $3\mathbb{Z}$. Die verbleibende Inklusion folgt wieder direkt aus der Darstellung des erzeugten Ideals aus Satz 9.36. (1 Punkt)

Hausaufgabe I-7.5 (Körper und Körperhomomorphismen) 1 + 2 + 1 = 4 Punkte

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie, dass

$$(a - x) \cdot (b - x) = 0_K$$

genau dann gilt, wenn $x = a$ oder $x = b$ ist.

(b) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit $\operatorname{char}(K) = 0$. Zeigen Sie Lemma 10.16, also dass dann K einen Unterkörper enthält, der isomorph zu $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass kein endlicher Körper geordnet werden kann.

Lösung.

(a) Jeder Körper ist auch ein Ring, also gilt nach den Rechenregeln in Ringen aus Lemma 9.3, dass

$$0_K \cdot a = 0_K \quad \forall a \in K \tag{0.1}$$

(das ist gerade eines der benötigten Argumente im Beweis des Satzes).

Ist $x = a$, dann gilt die Aussage offensichtlich. Ist $x \neq a$, dann ist, weil in Gruppen Inverse Elemente eindeutig sind, $a - x \neq 0_K$, und weil $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist, ist damit $a - x$ multiplikativ invertierbar, also gibt es $(a - x)^{-1}$ und somit ist

$$(b - x) = 1_K \cdot (b - x) = (a - x)^{-1} \cdot (a - x) \cdot (b - x) = (a - x)^{-1} \cdot 0_K = 0_K.$$

Man kann auch analog über die Kürzungsregeln argumentieren. (1 Punkt)

(b) Wie schon in Hausaufgabe I-7.3 betrachten wir die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \to K, \quad f\left(\frac{z}{n}\right) \coloneqq z1_K \cdot (n1_K)^{-1}$$

mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\operatorname{char}(K) = 0$ ist $(n1_K) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und daher der Term $(n1_K)^{-1}$ wohldefiniert.

Die Abbildung selbst ist ebenfalls wohldefiniert, denn für eine beliebige rationale Zahl $\frac{dz}{dn}$ mit teilerfremden $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{N}$ ist

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{dz}{dn}\right) &= (dz1_K) \cdot (dn1_K)^{-1} \\
&= (d1_K) \cdot (z1_K) \cdot (dn1_K)^{-1} \\
&= (d1_K) \cdot (n1_K) \cdot (n1_K)^{-1} \cdot (z1_K) \cdot (dn1_K)^{-1} \\
&= (n1_K)^{-1} \cdot (z1_K) \\
&= f\left(\frac{z}{n}\right),
\end{aligned}
$$

das heißt, alle Darstellungen einer rationalen Zahl werden mit der obigen Vorschrift auf das gleiche Element in K abgebildet.

Dann ist weiterhin offensichtlich $f(1) = 1_K$ und

$$
f\left(\frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2}\right) = (z_1 z_2 1_K) \cdot (n_1 n_2 1_K)^{-1} = z_1 1_K \cdot (n_1 1_K)^{-1} \cdot z_2 1_K \cdot (n_2 1_K)^{-1} = f\left(\frac{z_1}{n_1}\right) \dot{f}\left(\frac{z_2}{n_2}\right)
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2}\right) &= f\left(\frac{z_1 n_2 + z_2 n_1}{n_1 n_2}\right) \\
&= (z_1 n_2 + z_2 n_1) 1_K \cdot (n_1 n_2 1_K)^{-1} \\
&= z_1 1_K \cdot (n_1 1_K)^{-1} + z_2 1_K \cdot (n_2 1_K)^{-1} \\
&= f\left(\frac{z_1}{n_1}\right) + f\left(\frac{z_2}{n_2}\right).
\end{aligned}
$$

Damit ist f ein Körperhomomorphismus, dieser ist per Definition injektiv und das Bild ist als Bild eines Körperhomomorphismus ein Unterkörper. (2 Punkte)

(c) Es sei $(K, +, \cdot)$ mit $\leqslant$ ein geordneter Körper. In einem geordneten Körper muss $n1_K \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sein. Wäre $\operatorname{char} K > 0$, dann wäre aber $(\operatorname{char} K - 1)1_K = -1_K$ und damit sowohl größer oder gleich sowie kleiner oder gleich 0_K und damit $-1_K = 0_K$ und damit K kein Körper. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.