R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 5

Ausgabedatum: 10. November 2025
Abgabedatum: 17. November 2025

Übungsaufgabe I-5.1. ((Abelsche) Gruppen)

(a) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus Übungsaufgabe I-4.3 Gruppen sind, und ob sie kommutativ sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(b) Gegeben seien eine nichtleere Indexmenge I und für jedes $i \in I$ eine Gruppe $(G_i, \star_i)$. Wir definieren auf $\bigtimes_{i \in I} G_i$ die Verknüpfung

$$\star_\times(a, b) \coloneqq (a_i \star_i b_i)_{i \in I}.$$

Zeigen Sie, dass $(\bigtimes_{i \in I} G_i, \star_\times)$ eine Gruppe ist. (Diese Gruppe wird **direktes Produkt** der Gruppen $(G_i, \star_i)$ genannt). Zeigen Sie weiterhin, dass $(\bigtimes_{i \in I} G_i, \star_\times)$ genau dann abelsch ist, wenn alle $(G_i, \star_i)$ abelsch sind.

Übungsaufgabe I-5.2. (Kommutativität in (Halb-)Gruppen)

Gegeben sei eine partiell geordnete, nichtleere Menge $(H, \preccurlyeq)$ mit der Eigenschaft, dass für je zwei Elemente x, y das Infimum $\inf(\{x, y\}) \in H$ existiert. Zeigen Sie, dass $(H, \inf(\{\cdot, \cdot\}))$ eine Halbgruppe ist, und untersuchen Sie, ob diese kommutativ ist, und in welchen Fällen es sich sogar um eine Gruppe handelt.

Übungsaufgabe I-5.3. (Symmetrische Gruppe)

Bestimmen Sie die Fehlstände, eine Zerlegung in Transpositionen und das Signum der Permutation

$$\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgabe I-5.4. (Untergruppen)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass

  (i) $(m\mathbb{Z}, +)$ für $m \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist;
  Beachte: Hier ist tatsächlich $m\mathbb{Z} \coloneqq \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ gemeint, keine Restklassen.

  (ii) $\big(\big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\big|\, \forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) \geqslant 0)\big\}, \circ\big)$ eine Untergruppe von $\big(\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ bijektiv}\}, \circ\big)$ ist.

(b) Es sei $(U, \star)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \star)$. Zeigen Sie Lemma 7.43 des Skripts, also die folgende Aussage: Das neutrale Element e_U von $(U, \star)$ ist gleich dem neutralen Element e von $(G, \star)$. Außerdem gilt für alle $a \in U$, dass das Inverse von a in U übereinstimmt mit dem Inversen von a in G.

Übungsaufgabe I-5.5. (Erzeugung und Ordnung)

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

Beachte: In dieser Aufgabe werden wir in multiplikativer Notation arbeiten.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle a \rangle = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ für $a \in G$ ist, sowie, dass $\operatorname{ord}(a) = \#\langle a \rangle$, wenn $\operatorname{ord}(a)$ endlich ist, und ansonsten $\langle a \rangle$ abzählbar unendlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass zyklische Untergruppen von $(G, \cdot)$ immer kommutativ sind.

Übungsaufgabe I-5.6. (Nebenklassen)

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(U, \star)$ eine Untergruppe. Zeigen Sie Folgerung 7.57 des Skripts, also dass, wenn $(G, \star)$ abelsch ist, die Äquivalenzrelationen $\sim^U$ und ${}^U\!\sim$ identisch sind und entsprechend für alle $a \in G$ die Nebenklassen $a \star U$ und $U \star a$ übereinstimmen.

Hausaufgabe I-5.1 (Gruppen) 2.5 + 1 + 3.5 = 7 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus Hausaufgabe I-4.4 Gruppen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(b) Es sei G nichtleer und $(G, \star)$ eine Gruppe. Wir definieren auf $\mathcal{P}(G)$ die Abbildung $\tilde{\star}$ durch

$$A \mathbin{\tilde{\star}} B \coloneqq \{a \star b \mid a \in A \wedge b \in B\} \quad \text{für } A, B \in \mathcal{P}(G).$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\big(\mathcal{P}(G), \tilde{\star}\big)$ eine Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie Lemma 7.25 des Skripts, also die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(G, \star)$ eine Gruppe, so sind die Links- und Rechtstranslationen $\star_a$ und ${}_a\star$ für alle $a \in G$ bijektive Abbildungen $G \to G$.

(ii) Ist $(H, \star)$ eine nichtleere Halbgruppe und gilt für alle $a \in H$, dass die Links- und Rechtstranslationen $\star_a$ und ${}_a\star$ surjektive Abbildungen sind, dann ist $(H, \star)$ eine Gruppe.

Hausaufgabe I-5.2 (Kommutativität in Gruppen) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche Beispiele aus Hausaufgabe I-4.4 abelsche Gruppen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(b) Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit höchstens vier Elementen abelsch ist.

Hausaufgabe I-5.3 (Symmetrische Gruppe) 3 Punkte

Bestimmen Sie die Fehlstände, eine Zerlegung in Transpositionen und das Signum der Permutation

$$\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe I-5.4 (Untergruppen) 1 + 2 + 1 = 4 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge und $A \subseteq X$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass

(i) $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ eine Untergruppe von $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ ist;

(ii) $(\{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn} \sigma = 1\}, \circ)$ eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ ist.

(b) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und $(U_i, \star)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen mit der nichtleeren Indexmenge I. Zeigen Sie Lemma 7.47 des Skripts, also dass dann auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit $\star$ eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist.

(c) Es seien $(G, \star)$ eine Gruppe und $(U_1, \star)$, $(U_2, \star)$ Untergruppen. Zeigen Sie, dass $(U_1 \cup U_2, \star)$ genau dann eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.

Hausaufgabe I-5.5 (Erzeugung und Ordnung) 1 + 2 = 3 Punkte

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

Beachte: In dieser Aufgabe werden wir in multiplikativer Notation arbeiten.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^{-1})$.

(b) Die Menge $\{a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \mid a, b \in G\}$ der **Kommutatoren** aus G erzeugt die sogenannte **Kommutatorgruppe** $K(G) \coloneqq \langle \{a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \mid a, b \in G\} \rangle$, eine Untergruppe von $(G, \cdot)$. Zeigen Sie, dass genau dann $(K(G), \cdot) = (\{1\}, \cdot)$ ist, wenn $(G, \cdot)$ abelsch ist.

Hausaufgabe I-5.6 (Nebenklassen) 2 Punkte

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(U, \star)$ eine Untergruppe. Zeigen Sie den Satz 7.60 von Lagrange, also dass, wenn $(G, \star)$ endlich ist, die Beziehung $\#U \mid \#G$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\#A \cup B = \#A + \#B$ für endliche, disjunkte Mengen A, B gilt.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.