R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 4

Ausgabedatum: 3. November 2025
Abgabedatum: 10. November 2025

Übungsaufgabe I-4.1. (Kardinalität)

(a) Bestimmen Sie für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ die Kardinalität der Menge der Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage von Satz 6.35 des Skripts für abzählbar unendliche Mengen X, Y i. A. nicht gilt.

(c) Zeigen Sie, dass Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mengen definiert.

(d) Es seien I eine abzählbar unendliche Indexmenge und für jedes $i \in I$ seien X_i paarweise disjunkte abzählbar unendliche Mengen. Skizzieren Sie einen Beweis für die Aussage, dass $\bigcup_{i \in I} X_i$ eine abzählbar unendliche Menge ist.

Übungsaufgabe I-4.2. (Familien und Mächtigkeit)

Es sei Y eine Menge. Zeigen Sie, dass durch

$$(y_i)_{i \in I_1} \preccurlyeq (\tilde{y}_i)_{i \in I_2} :\Leftrightarrow (y_i)_{i \in I_1} \text{ ist Teilfamilie von } (\tilde{y}_i)_{i \in I_2}$$

eine Ordnungsrelation auf der Klasse aller Familien mit Werten in Y definiert ist.

Übungsaufgabe I-4.3. (Beispiele von Halbgruppen)

Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Halbgruppen bzw. Monoide sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie für Monoide das jeweilige neutrale Element an.

(i) $(\mathbb{R}^X, \cdot)$

(ii) $\left(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}\right)$

(iii) $(\mathcal{P}(X), \cup)$

(iv) $(\mathcal{P}(X), \setminus)$

Übungsaufgabe I-4.4. (Neutralität in Halbgruppen)

Wir erweitern die Definition 7.6 des Skripts für eine Halbgruppe $(H, \star)$ wie folgt:
Ein Element $e_\ell \in H$ heißt **linksneutrales Element** von $(H, \star)$, wenn $e_\ell \star x = x \; \forall x \in H$ gilt.
Ein Element $e_r \in H$ heißt **rechtsneutrales Element** von $(H, \star)$, wenn $x \star e_r = x \; \forall x \in H$ gilt.

Zeigen Sie:

(a) I. A. sind linksneutrale Elemente nicht eindeutig. Das Gleiche gilt für rechtsneutrale Elemente.

(b) Wenn in einer Halbgruppe $(H, \star)$ ein linksneutrales Element e_ℓ und ein rechtsneutrales Element e_r existieren, dann stimmen beide überein und sind ein neutrales Element, mit dem $(H, \star)$ ein Monoid ist.

Hausaufgabe I-4.1 (Charakterisierung der Injektivität) 3 Punkte

Es sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie die verbleibenden Implikationen für den Beweis von Satz 6.29 des Skripts, also für die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) f ist injektiv.

(ii) Es existiert eine Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Eine solche Abbildung heißt eine **Linksinverse** (englisch: left inverse) von f. Sie ist notwendig surjektiv. Ihre Einschränkung $g|_{f(X)}$ auf das Bild von f ist eindeutig.

(iii) Für beliebige Mengen X_0 und beliebige Abbildungen $f_1, f_2\colon X_0 \longrightarrow X$ gilt: Aus $f \circ f_1 = f \circ f_2$ folgt $f_1 = f_2$.

Hausaufgabe I-4.2 (Stabilität der Mächtigkeit überabz. Mengen bei Verlust abz. Teilmengen) 2 + 2 + 2 = 6 Punkte

Es seien X eine überabzählbare Menge und $Y \subsetneq X$ eine abzählbar unendliche Menge.

(a) Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ überabzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ eine abzählbar unendliche Teilmenge enthält.

(c) Zeigen Sie, dass X und $X \setminus Y$ gleichmächtig sind.

Hausaufgabe I-4.3 (Konkatenation von Familien) 1.5 + 1.5 + 1 = 4 Punkte

Es sei Y eine Menge. Für zwei Familien $F_1 = (v_j)_{j \in J_1}$ und $F_2 = (\tilde{v}_j)_{j \in J_2}$ ist die Konkatenation der beiden Familien definiert als

$$F_1 \mathbin{\|} F_2\colon (\{1\} \times J_1) \mathbin{\dot\cup} (\{2\} \times J_2) \longrightarrow Y$$

$$F_1 \mathbin{\|} F_2(i, j) \coloneqq \begin{cases} v_j, & i = 1 \\ \tilde{v}_j, & i = 2. \end{cases}$$

(a) Erklären Sie, weshalb in der obigen Definition die neue Indexmenge $(\{1\} \times J_1) \mathbin{\dot\cup} (\{2\} \times J_2)$ statt der Menge $J_1 \cup J_2$ verwendet wurde.

(b) Verallgemeinern Sie die Definition der Konkatenation zweier Familien für den Fall einer Familie $(F_i)_{i \in I}$ von Familien F_i mit Indexmengen J_i und Werten in Y über einer Indexmenge I. **Beachte:** Eine solche Konkatenation werden wir mit $\|_{i \in I} F_i$ bezeichnen.

(c) Evaluieren Sie $\|_{i \in I} F_i(15.7, \{-10, 10\})$ für den Fall, dass $Y = \mathbb{N}_0$ und $I = \mathbb{R}$ ist, sowie

$$J_i = \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid \max(A) \le i\} \quad \text{und} \quad F_i\colon J_i \ni A \mapsto \#(A \cap \mathbb{R}_>).$$

Hausaufgabe I-4.4 (Beispiele von Halbgruppen) 3 Punkte

Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Halbgruppen bzw. Monoide sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie für Monoide das jeweilige neutrale Element an.

(i) $(\mathbb{R}^X, +)$
(ii) $(\mathcal{P}(X), \cap)$
(iii) $(\mathcal{P}(X), \triangle)$
(iv) $(X^X, \circ)$
(v) $(\mathbb{Z}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 \cdot y_1, x_2 + y_2))$
(vi) $(\mathcal{P}(X), (A, B) \mapsto A^c \cup B^c)$

Hausaufgabe I-4.5 (Invertierbarkeit in Halbgruppen) 2.5 + 1.5 = 4 Punkte

Wir erweitern die Definition 7.14 des Skripts für eine Halbgruppe $(H, \star)$ mit neutralem Element e wie folgt:

Ein Element $a \in H$ heißt **linksinvertierbar**, wenn ein $b_\ell \in H$ existiert mit $b_\ell \star a = e$. In diesem Fall heißt b_ℓ ein **linksinverses Element** zu a.

Ein Element $a \in H$ heißt **rechtsinvertierbar**, wenn ein $b_r \in H$ existiert mit $a \star b_r = e$. In diesem Fall heißt b_r ein **rechtsinverses Element** zu a.

Es sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe. Zeigen Sie:

(a) I. A. sind linksinverse Elemente nicht eindeutig. Das Gleiche gilt für rechtsinverse Elemente.

(b) Wenn a aus H links- und rechtsinvertierbar ist, dann ist a invertierbar und jedes links- oder rechtsinverses Element zu a gleicht dem eindeutigen Inversen von a.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.