R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 3 (Lösung)

Ausgabedatum: 27. Oktober 2025
Abgabedatum: 3. November 2025

Übungsaufgabe I-3.1. (Äquivalenzrelationen)

(a) Gegeben sei die Menge der vorläufigen rationalen Zahlen $\widetilde{\mathbb{Q}} \coloneqq \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \tag{5.17}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\widetilde{\mathbb{Q}}$ definiert.

(b) Es sei X eine nichtleere Menge und R, S Äquivalenzrelationen auf X. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $S \circ R$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung.

(a) Wir prüfen die definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität) nach. Seien dafür also $q_1, q_2, q_3 \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ mit den Darstellungen

$$q_1 = \frac{m_1}{n_1}, \qquad q_2 = \frac{m_2}{n_2}, \qquad q_3 = \frac{m_3}{n_3}$$

gegeben. Dann gilt $m_1 n_1 = m_1 n_1$ und damit $q_1 \, R \, q_1$, also ist R **reflexiv**. Ist $q_1 \, R \, q_2$, dann ist also $m_1 n_2 = m_2 n_1$ und damit wegen der Symmetrie der Gleichheit in $\mathbb{Z}$ auch $m_2 n_1 = m_1 n_2$, also $q_2 \, R \, q_1$, und damit R **symmetrisch**. Ist $q_1 \, R \, q_2$ und $q_2 \, R \, q_3$, dann ist

$$m_1 n_2 = m_2 n_1 \quad \text{und} \quad m_2 n_3 = m_3 n_2, \quad \text{also} \quad m_1 m_2 n_2 n_3 = m_2 m_3 n_1 n_2 \Rightarrow m_2 n_2 (m_1 n_3 - m_3 n_1) = 0.$$

Entsprechend muss $m_2 = 0$ und damit $m_1 = m_3 = 0$ sein, woraus $m_1 n_3 = m_3 n_1$ folgt, also entsprechend $q_1 \, R \, q_3$, oder es ist $m_1 n_3 - m_3 n_1 = 0$ und damit $m_1 n_3 = m_3 n_1$ also auch $q_1 \, R \, q_3$ und somit R **transitiv**.

(b) Im Allgemeinen ist die Komposition zweier Äquivalenzrelationen keine Äquivalenzrelation. Man kann zwar zeigen, dass die Komposition $S \circ R$ weiterhin reflexiv ist, denn $(x, x) \in R \cap S$ für alle $x \in X$, man kann also in der Definition der Komposition $y = x$ wählen, weder die Symmetrie noch die Transitivität bleiben im Allgemeinen jedoch erhalten. Ein Beispiel, welches das beides zeigt, ist z. B. die Menge $X = \{a, b, c\}$ mit den Äquivalenzrelationen

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\} \qquad \text{und} \qquad S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\},$$

$$S \circ R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c)\}.$$

Hier ist zwar $a\,(S \circ R)\,c$, aber nicht $c\,(S \circ R)\,a$, sondern lediglich $c\,(R \circ S)\,a$ gilt, für den Rückweg dreht sich also die Reihenfolge gerade ungünstig um. Das fehlen von (c, a) zeigt auch gleich, dass die Transitivität nicht gilt, denn es sind ja (c, b) und (b, a) in $S \circ R$.

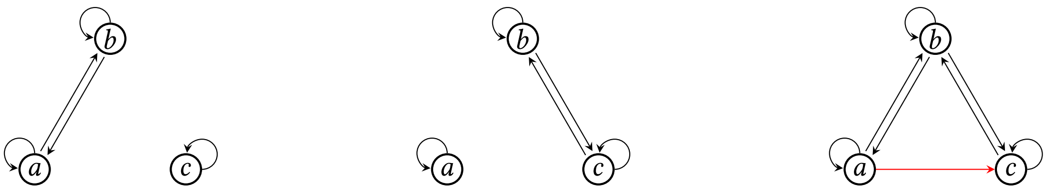

Abbildung I-3.1: Visualisierung der homogenen Relationen R, S und $S \circ R$ v.l.n.r mit der assymetrischen Verbindung (a, c) in rot, auf Grund welcher weder Symmetrie noch Transitivität erhalten sind.

Übungsaufgabe I-3.2. (Ordnungsrelationen)

(a) Zeigen Sie, dass die homogene Relation

$$R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \forall i = 1, 2\ (x_i \leqslant y_i)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

auf $\mathbb{R}^2$ eine Halbordnung aber keine Totalordnung ist. Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\}$ bzgl. R und erklären Sie, ob es sich dabei um ein Minimum respektive ein Maximum handelt.

(b) Es sei $\preccurlyeq$ eine Halbordnung auf einer Menge X. Zeigen Sie Lemma 5.30 des Skripts, also dass auch die inverse Relation $\succcurlyeq$ eine Halbordnung auf X ist, und dass, falls $\preccurlyeq$ eine Totalordnung ist, dann auch $\succcurlyeq$ eine Totalordnung ist.

Lösung.

(a) Wir prüfen die definierenden Eigenschaften einer Ordnungsrelation (Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität) nach.

Es seien also x, y und z aus $\mathbb{R}^2$ gegeben.

Da $x_i \leqslant x_i$ für alle Komponentenindizes $i = 1, 2$ ist, gilt $x \, R \, x$ und damit die **Reflexivität** der Relation.

Nun ist $x \, R \, y$ und $y \, R \, x$ genau dann gleichzeitig erfüllt, wenn $x_i \leqslant y_i \wedge y_i \leqslant x_i$ für $i = 1, 2$ und damit $x_i = y_i$ für $i = 1, 2$ und damit $x = y$, womit R **antisymmetrisch** ist.

Ist $x \, R \, y$ und $y \, R \, z$, dann ist $x_i \leqslant y_i$ und $y_i \leqslant z_i$ für $i = 1, 2$ und damit sofort wegen der Transitivität der Totalordnung in $\mathbb{R}$ auch $x_i \leqslant z_i$ für $i = 1, 2$, also $x \, R \, z$ und damit ist R ebenfalls **transitiv**.

Dass es sich bei R um keine Totalordnung handelt sieht man z. B. an den beiden Punkten $(1, 0)$ und $(0, 1)$, die nicht vergleichbar sind.

Bei der Menge $A \coloneqq \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0 \right\}$ handelt es sich um das abgeschlossene, linke untere Kreisscheibenviertel. Diese Menge enthält die Punkte $(-1, 0)$ und $(0, -1)$. Jede untere Schranke x an A muss also mindestens mit diesen beiden Punkten vergleichbar sein, also $x_1 \leqslant -1$ und $x_2 \leqslant -1$ für jede untere Schranke x an A gelten. Der Punkt $(-1, -1)$ selbst erfüllt diese Bedingung und stellt damit die größte untere Schranke dar, also das **Infimum**. Da der Punkt $(-1, -1)$ die quadratische Ungleichung nicht erfüllt, liegt das Infimum nicht in A und ist entsprechend **kein Minimum**.

Analog zeigt man, dass $(0, 0)$ das **Supremum** ist, was allerdings in A liegt und damit **ein Maximum** ist.

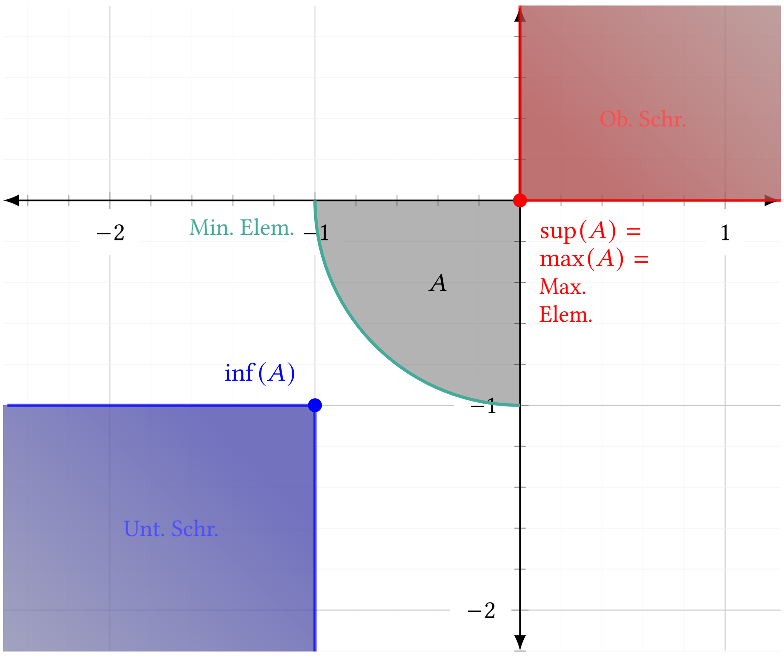

Abbildung I-3.2: Visualisierung der Extremalpunkte im Fall des unteren linken Kreisscheibenviertels und der komponentenweisen Teilordnung.

(b) Von den definierenden Eigenschaften einer (totalen) Ordnungsrelation (Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität, Totalität) erkennt man in der Definition der **Reflexivität**, der **Antisymmetrie** und der **Totalität** sofort, dass es keine Rolle spielt ob man eine Relation oder ihre Inverse betrachtet, weil in der Definition immer Tupel (x, y) *und* (y, x) betrachtet werden.

Für den Nachweis der **Transitivität** seien x, y und z aus X gegeben, so dass für die inverse Relation R^{-1} gilt:

$$x \, R^{-1} \, y \;\wedge\; y \, R^{-1} \, z.$$

Per Definition heißt das, dass

$$y \, R \, x \;\wedge\; z \, R \, y$$

und somit gilt auf Grund der Transitivität von R auch $z \, R \, x$, also wieder per Definition $x \, R^{-1} \, z$ und damit die Transitivität von R^{-1}.

Übungsaufgabe I-3.3. (Bilder und Urbilder)

(a) Es seien $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ Funktionen und $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$ Mengen. Zeigen Sie:

(i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ (ii) $B \supseteq g(g^{-1}(B))$

(b) Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Weiter seien I und J irgendwelche Indexmengen und $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Teilmengen von X sowie $\{Y_j \mid j \in J\}$ eine Menge von Teilmengen von Y. Zeigen Sie, dass dann Gleichungen (6.5b) und (6.5d) aus Satz 6.8 des Skripts gelten, also:

(6.5b) $$f\Big(\bigcap_{i \in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

(6.5d) $$f^{-1}\Big(\bigcap_{j \in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

Lösung.

(a)

(i) Nach Definition von Bild und Urbild ist

$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\}.$$

Für jedes $x \in A$ ist nach Definition des Bilds $f(x)$ in $f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$ und damit $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Beachte: Dass hier im Allgemeinen keine Mengengleichheit gelten kann, sieht man z. B. an der Funktion $f : \{1, 2\} \to \{1\}$, wo für $A = \{1\}$ gilt: $\{1\} \subsetneq \{1, 2\} = f^{-1}(f(\{1\}))$. Hier ist die fehlende Linkseindeutigkeit gerade das Problem. Für injektive Funktionen gilt hier immer Gleichheit.

(ii) Nach Definition von Bild und Urbild ist

$$g(g^{-1}(B)) = \{g(y) \mid y \in g^{-1}(B)\} = \{g(y) \mid y \in \{y \in Y \mid g(y) \in B\}\} = \{g(y) \mid g(y) \in B\} \subseteq B.$$

Beachte: Dass hier im Allgemeinen keine Mengengleichheit gelten kann, sieht man z. B. an der Funktion $f : \{1\} \to \{1, 2\}$ mit $f(1) = 1$, wo $f(f^{-1}(\{1, 2\})) = f(\{1\}) = \{1\} \subsetneq \{1, 2\}$. Hier ist die fehlende Rechtstotalität gerade das Problem. Für surjektive Funktionen gilt hier immer Gleichheit.

(b)(6.5b) Per Definition des Bilds einer Funktion und des Schnitts von Mengen ist

$$\begin{aligned}
f\Big(\bigcap_{i \in I} X_i\Big) &= f\Big(\Big\{x \in X \,\Big|\, \forall i \in I\ (x \in X_i)\Big\}\Big) && \text{(Def. des Schnitts)} \\
&= \{f(x) \in Y \mid \forall i \in I\ (x \in X_i)\} && \text{(Def. des Bilds)} \\
&\subseteq \Big\{y \in Y \,\Big|\, \forall i \in I\ (y \in f(X_i))\Big\} \\
&= \bigcap_{i \in I} f(X_i) && \text{(Def. des Schnitts)}
\end{aligned}$$

Dabei gilt die entscheidende Inklusion der obigen Gleichungs-/Inklusionskette, da wenn ein und dasselbe $x \in X_i$ für alle i, dann ist $f(x)$ in $f(X_i)$ für alle i.

Beachte: Dass hier im Allgemeinen keine Mengengleichheit gelten kann, sieht man z. B. an der Funktion $f\colon \{1,2\} \to \{1\}$ und den Mengen $X_1 = \{1\}$ und $X_2 = \{2\}$, wo $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ aber $f(X_1) = f(X_2) = \{1\}$ und somit $f(X_1 \cap X_2) = f(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \{1\} = f(X_1) \cap f(X_2)$.

Es gilt in dem Beispiel nur die ungleiche Mengeninklusion, da die Funktion f nicht injektiv ist, und damit ein Element im Bildbereich existieren kann, das Urbilder in jedem der X_i hat, die aber nicht gleich sind und damit nicht im Schnitt aller X_i liegen. Für injektive Funktionen hingegen gilt hier entsprechend Mengengleichheit.

(6.5d) Per Definition des Urbilds einer Funktion und des Schnitts von Mengen ist

$$\begin{aligned}
f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) &= f^{-1}\Big(\big\{y \in Y \,\big|\, \forall j \in J \ (y \in Y_j)\big\}\Big) && \text{(Def. des Schnitts)}\\
&= \{x \in X \mid \forall j \in J \ (f(x) \in Y_j)\} && \text{(Def. des Urbilds)}\\
&= \bigcap_{j\in J} \{x \in X \mid f(x) \in Y_j\} && \text{(Def. des Schnitts)}\\
&= \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j). && \text{(Def. des Urbilds)}
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe I-3.4. (Injektivität und Surjektivität)

(a) Gegeben sei die Menge S der Studierenden eines Kurses und die Menge P der Plätze im Hörsaal. Was können Sie über die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Abbildung $f\colon S \to P$ von Studierenden auf ihre Plätze in den folgenden Fällen aussagen?

 (i) Es sind noch Plätze frei und jede/r hat einen eigenen Platz.
 (ii) Jemand sitzt auf dem Schoß eines anderen, obwohl noch Plätze frei sind.
 (iii) Jeder Platz ist belegt.

(b) Es sei $f\colon X \to Y$ eine injektive Funktion. Zeigen Sie Lemma 6.12 des Skripts, also dass $f|^{f(X)}$ bijektiv ist.

Lösung.

(a) (i) In diesem Fall ist die Abbildung f **injektiv**, denn jedes Element des Bilds (Plätze) hat ein eindeutiges Urbild (Person, die auf dem Platz sitzt). Auf jedem belegten Platz sitzt also genau eine Person. Die Abbildung ist aber **nicht surjektiv**, denn es gibt

Plätze, auf denen niemand sitzt, Elemente der Zielmenge (Plätze) haben also kein Urbild (Person) unter f. Die Abbildung f kann also **nicht bijektiv** sein.

(ii) In diesem Fall ist die Abbildung f **nicht injektiv**, denn es gibt einen Platz auf dem zwei Personen sitzen (eine Überbelegung im Bildbereich) und f ist **nicht surjektiv**, denn nicht jedes Element in der Zielmenge (Plätze) hat ein Urbild unter f. Die Abbildung kann also **nicht bijektiv** sein.

(iii) In diesem Fall ist die Abbildung f **surjektiv**, denn jedes Element der Zielmenge (Plätze) hat mindestens ein Urbild (Person, die drauf sitzt). Wir können über **Injektivität** aber **nichts aussagen**, denn wir wissen nicht, ob eventuell ein Platz überbelegt ist. Entsprechend können wir auch über die **Bijektivität keine Aussage** treffen.

(b) Wir definieren zur Abkürzung $g\colon X \to f(X)$ durch $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. Wir zeigen zunächst, dass g die Injektivität von f erbt. Es seien dazu $x, x' \in X$ gegeben mit $g(x) = g(x')$, also $f(x) = f(x')$. Da f injektiv ist, folgt $x = x'$. Also ist auch g injektiv. Die Surjektivität von g folgt aus $g(X) = f(X)$.

Hausaufgabe I-3.1 (Äquivalenzrelationen) 1 + 4 = 5 Punkte

(a) Gegeben sei die Relation

$$R \coloneqq \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass es sich bei R um eine Äquivalenzrelation handelt.

(b) Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine Partition von X. Zeigen Sie Satz 5.25(ii) des Skripts, also dass es dann eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation R auf X gibt, sodass $\mathcal{A}$ genau aus den Äquivalenzklassen von R besteht.

Lösung.

(a) Es handelt sich bei R nicht um eine Äquivalenzrelation. Zwar zeigt die symmetrische Definition des euklidischen Abstands schon, dass es sich um eine **symmetrische** Relation handelt, und da der euklidische Abstand jedes Puntes zu sich selbst 0 und damit kleiner als 1 ist, ist die Relation auch **reflexiv**. Natürlich gilt aber **keine Transitivität**, denn $(-1, 0)\, R\, (0, 0)$ und $(0, 0)\, R\, (1, 0)$ (die Abstände sind jeweils 1) aber nicht $(-1, 0)\, R\, (1, 0)$, da der Abstand 2 ist. (1 Punkt)

(b) Wir definieren die Relation

$$R \coloneqq \{(x, y) \mid \exists A \in \mathcal{A}(x \in A \land y \in A)\} \subseteq X^2,$$

von der wir zeigen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Nach Eigenschaft (i) der Partition ist $(x, x) \in R$ für alle $x \in X$ und damit R **reflexiv**.

Es seien nun weiter x, y und z aus X. Ist $x\, R\, y$, dann gibt es also ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A \land y \in A$ und damit auch wegen der Symmetrie von der Kunjunktion auch $y \in A \land x \in A$, also yRx und damit R **symmetrisch**.

Ist $x\, R\, y$ und $y\, R\, z$, dann gibt es Mengen A und A' mit $x \in A \land y \in A$ und $y \in A' \land z \in A'$. Nach Eigenschaft (ii) der Partition und weil $y \in A \cap A'$, muss $A = A'$ sein und damit auch $x \in A \land z \in A$ also $x\, R\, z$ und damit R **transitiv**.

Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation entsprechen nach Konstruktion genau den $A \in \mathcal{A}$, d. h. es ist $A = [x]$ für alle x in A. Da Äquivalenzrelationen genau dann übereinstimmen, wenn Ihre Äquivalenzklassen übereinstimmen, ist diese Relation eindeutig bestimmt. (4 Punkte)

Hausaufgabe I-3.2 (Ordnungsrelationen) 4 + 4 = 8 Punkte

(a) Gegeben seien die Menge $A \coloneqq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\}$ aus Übungsaufgabe I-3.2 und die Ordnungsrelation

$$R \coloneqq \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

(i) Bestimmen Sie Infimum/Supremum, Minimum/Maximum und minimale/maximale Elemente von A bzgl. R.

(ii) Erklären Sie, was mit dem Supremum aus Teilaufgabe (i) passiert, wenn statt A die Menge $A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ betrachtet wird.

(b) Es sei X eine Menge. Zeigen Sie Lemma 5.32 des Skripts, also die folgenden Aussagen.

(i) Ist $\preccurlyeq$ eine Ordnungsrelation auf X, dann ist $\prec \coloneqq \preccurlyeq \setminus \Delta_X$ eine strenge Ordnungsrelation auf X.

(ii) Ist $\prec$ eine strenge Ordnungsrelation auf X, dann ist $\preccurlyeq \coloneqq \prec \cup \Delta_X$ eine Ordnungsrelation auf X.

Lösung.

(a) Bei der Relation R handelt es sich um die lexikografische Ordnungsrelation. Diese ist total, denn für zwei beliebige Elemente x und y wird xRy oder yRx anhand der ersten Komponente entschieden, es sei denn diese sind gleich, dann anhand der zweiten. Damit sind minimale/maximale Elemente immer auch Minima/Maxima. (0.5 Punkte)

Die Menge der oberen Schranken besteht gerade aus der Vereinigung des offenen rechten Halbraums und der oberen y-Halbachse.

$$OS \coloneqq \mathbb{R}_{>} \times \mathbb{R} \cup \{0\} \times \mathbb{R}_{\geqslant}.$$

Die Menge $\mathbb{R}_{>} \times \mathbb{R}$ ist dabei gerade die Menge, bei der das erste Kriterium der Ordnungsrelation greift und für $\{0\} \times \mathbb{R}_{\geqslant}$ das zweite. Dass es sich bei der Menge um eine Menge oberer Schranken handelt, sieht man ein, da per Definition für alle $x \in A$ gilt: $x_1, x_2 \leqslant 0$. Da der Punkt $(0, 0) \in A$ die Bedingung mit Gleichheit erfüllt ist, können auch keine weiteren oberen Schranken existieren. (1 Punkt)

Die Menge der unteren Schranken besteht gerade aus der Vereinigung

$$US \coloneqq \{(x_1, x_2) \mid x_1 < -1\} \cup \{-1\} \times R_{\leqslant},$$

wobei wieder die Mengen zu dem ersten respektive zweiten Kriterium der Ordnungsrelation korrespondieren. Dass es sich hier um untere Schranken handelt, sieht man daran, dass $x_1 \geqslant -1$ für alle $x \in A$ gilt, und $x_1 = -1$ für $x \in A$ nur dann gelten kann, wenn $x_2 = 0$ ist. Genau dieser Punkt $(-1, 0) \in A$ zeigt auch, dass es keine weiteren unteren Schranken geben kann. (1 Punkt)

Gerade die beiden Punkte $(-1, 0)$ und $(0, 0)$ aus A sind das Minimum und das Maximum (und damit auch Infimum/Supremum und die einzigen minimalen/maximalen Elemente. Sie liegen offensichtlich in A, sind untere/obere Schranken, und, gerade nach Konstruktion der Mengen OS und US, ebenfalls obere/untere Schranken and die Mengen der unteren/oberen Schranken von A. (1 Punkt)

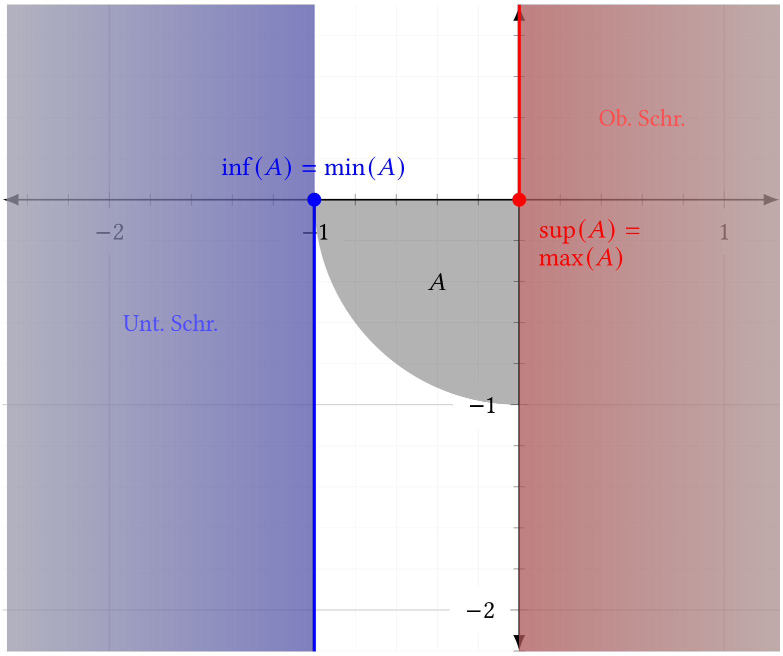

Abbildung I-3.3: Visualisierung der Extremalpunkte im Fall des unteren linken Kreisscheibenviertels und der lexikografischen Totalordnung.

(b) Sollte A nun um die y-Achse ergänzt werden, so muss jede obere Schranke $x_1 > 0$ erfüllen, und somit kann kein Supremum mehr existieren. (0.5 Punkte)

(c) (i) Als Ordnungsrelation ist $\preccurlyeq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. Das Entfernen der Diagonalen macht $\prec := \preccurlyeq \setminus \Delta_X$ offensichtlich irreflexiv. (0.5 Punkte)

Es verbleibt zu zeigen, dass die Eigenschaft der Transitivität hierbei erhalten bleibt, für die Symmetrie gilt dies offensichtlich, da Diagonalelemente für diese Eigenschaft keine Rolle spielen. Es seien dafür x, y, z aus X gegeben mit $x \prec y$ und $y \prec z$ (und damit insbesondere $x \neq y$ und $y \neq z$). Dann gilt auch $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq z$ und somit wegen der Transitivität von $\preccurlyeq$ auch $x \preccurlyeq z$. Damit folgt dann auch, dass $x \neq z$, denn sonst wäre $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq x$ und damit $x = y = z$, was einen Widerspruch darstellt. Entsprechend ist $x \prec z$. (1 Punkt)

(ii) Als strenge Ordnungsrelation ist $\prec$ irreflexiv und transitiv. Das Hinzufügen der Diagonalen macht $\preccurlyeq := \prec \cup \Delta_X$ offensichtlich reflexiv. (0.5 Punkte)

Es verbleibt zu zeigen, dass $\preccurlyeq$ weiterhin transitiv und antisymmetrisch ist. Für die Transitivität seien x, y, z aus X gegeben mit $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq z$. Gilt entweder $x = y$ oder $y = z$, so folgt $x \preccurlyeq z$ aus der jeweils verbleibenden $\preccurlyeq$ relation verschiedener Elemente. Gelten beide Gleichheiten, so ist $x \preccurlyeq z = x$ auf Grund der hinzugefügten Diagonalen. (1 Punkt)

Für die Antisymmetrie seien $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq x$. Angenommen $x \neq y$, dann wären per Definition auch $x \prec y$ und $y \prec x$ und damit wegen der Transitivität von $\prec$ auch $x \prec x$, im Widerspruch dazu, dass $\prec$ eine strenge Halbordnung ist. (1 Punkt)

Hausaufgabe I-3.3 (Funktionen) $4.5 + 2 + 1.5 = 8$ Punkte

(a) Es seien $f : X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Mengen. Zeigen Sie:

(i) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ (ii) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(b) Gegeben seien Mengen X und Y und eine Relation $R \subseteq X \times Y$. Wir erweitern die Definition des Bilds und Urbilds von Funktionen auf allgemeine Relationen via

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{\mathrm{Rel}}(R, A) &:= \{b \in Y \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\} \\ \mathrm{UB}_{\mathrm{Rel}}(R, B) &:= \{a \in X \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\} \end{aligned}$$

für alle $A \subset X$ und $B \subset Y$. Untersuchen Sie, ob mit diesen Definitionen für Bild und Urbild analoge Aussagen zu Gleichungen (6.5b) und (6.5d) aus Satz 6.8 des Skripts auch für allgemeine Relationen gelten.

(c) Es seien eine Funktion $f : X \to Y$ und eine Äquivalenzrelation $\sim_Y$ auf Y gegeben. Zeigen Sie, dass durch $x_1 \sim_X x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) \sim_Y f(x_2)$ eine Äquivalenzrelation $\sim_X$ auf X definiert ist.

Lösung.

(a) (i) Es gilt

$$\begin{aligned} f(A_1 \setminus A_2) &= \{y \in Y \mid \exists x \in A_1 \setminus A_2 : f(x) = y\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists x \in X : x \in A_1 \wedge x \notin A_2 \wedge f(x) = y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\supseteq \{y \in Y \mid \exists x_1 \in A_1(f(x_1) = y) \land \nexists x_2 \in A_2(f(x_2) = y)\}\\ &= f(A_1) \setminus f(A_2),\end{aligned}$$

da jedes y mit Urbild aus $A_1 \cap A_2$ auch ein y mit je einem Urbild in A_1 und in A_2 ist. Dass hier im allgemeinen keine Gleichheit gilt sieht man an den Mengen $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$ und der Funktion $f\colon \{1,2\} \to \{1\}$, wo $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) = \{1\} \neq \emptyset = \{1\} \setminus \{1\} = f(A_1) \setminus f(A_2)$ ist. (2.5 Punkte) Hinreichend dafür, dass hier Gleichheit gilt, ist die Injektivität der Funktion f, denn dann gibt es kein y im Bildbereich, dass Bild von einem $x_1 \in A_1$ und einem $x_2 \in A_2$ ist, wenn $x_1 \neq x_2 \in A_2 \cap A_2$.

(ii)

Es gilt

$$\begin{aligned}f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &= \{x \in X \mid \exists y \in B_1 \setminus B_2 : f(x) = y\}\\ &= \{x \in X \mid \exists y \in Y : y \in B_1 \land y \notin B_2 \land f(x) = y\}\\ &= \{x \in X \mid \exists y_1 \in B_1(f(x) = y_1) \land \nexists y_2 \in B_2(f(x) = y_2)\}\\ &= f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2),\end{aligned}$$

wobei die entscheidende, rot markierte Gleichung nur wegen der Rechtseindeutigkeit der Funktion gilt, denn es gibt kein x, dass nach B_1 und nach B_2 abgebildet werden kann, ohne in den Schnitt abgebildet zu werden. (2 Punkte)

(b) Tatsächlich gilt die Inklusionsaussage für das Bild des Schnitts weiterhin und der Beweis hat exakt die gleiche Struktur wie im Fall einer Funktion, also

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{\mathrm{Rel}}\Big(R, \bigcap_{i\in I} X_i\Big) &= \mathrm{B}_{\mathrm{Rel}}\Big(R, \Big\{x \in X \,\Big|\, \forall i \in I\ (x \in X_i)\Big\}\Big) && \text{(Def. des Schnitts)}\\ &= \{y \in Y \mid \exists x \in X\ (xRy \land \forall i \in I\ (x \in X_i))\} && \text{(Def. des Bilds)}\\ &\subseteq \{y \in Y \mid \forall i \in I\ \exists x \in X\ (xRy \land (x \in X_i))\}\\ &= \Big\{y \in Y \,\Big|\, \forall i \in I\ (y \in \mathrm{B}_{\mathrm{Rel}}(R, X_i))\Big\} && \text{(Def. des Bilds)}\\ &= \bigcap_{i\in I} \mathrm{B}_{\mathrm{Rel}}(f, X_i), && \text{(Def. des Schnitts)}\end{aligned}$$

wobei wieder die entscheidende Inklusion auf Grund der vertauschten Quantoren gilt. (1 Punkt)

Allerdings ist im Fall der Relationen

$$\mathrm{UB}_{\mathrm{Rel}}\Big(R, \bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \mathrm{UB}_{\mathrm{Rel}}\Big(R, \Big\{y \in Y \,\Big|\, \forall j \in J\ (y \in Y_j)\Big\}\Big) \qquad \text{(Def. des Schnitts)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x \in X \mid \exists y \in Y \,(xRy \wedge \forall j \in J \,(y \in Y_j))\} && \text{(Def. des Urbilds)} \\
&\subseteq \{x \in X \mid \forall j \in J \,\exists y \in Y \,(xRy \wedge y \in Y_j)\} \\
&= \bigcap_{j \in J} \{x \in X \mid \exists y \in Y_j \,(xRy)\} && \text{(Def. des Schnitts)} \\
&= \bigcap_{j \in J} \mathrm{UB}_{\mathrm{Rel}}(R, Y_j), && \text{(Def. des Urbilds)}
\end{aligned}
$$

und dass hier im Allgemeinen die Gleichheit nicht gelten kann sieht man an der inversen Relation zu der Funktion aus dem Beispiel nach dem Beweis von (6.5d) in Übungsaufgabe I-3.3 , wo also $f\colon \{1, 2\} \to \{1\}$ und die dazu gehörige Umkehrrelation 1 mit 1 und 2 in Verbindung setzt. (1 Punkt)

Beachte: Dasss der Schnitt sich dem Urbild verträgt lag ausschließlich an der Rechtseindeutigkeit, die für allgemeine Relationen nicht erhalten bleibt. Die Rechtseindeutigkeit übernimmt hier die Rolle der Linkseindeutigkeit/Injektivität, die man braucht, damit der Schnitt sich mit dem Bild verträgt, siehe der Kommentar zum Beweis von (6.5c) in Übungsaufgabe I-3.3 .

(c) Die Reflexivität von $\sim_X$ folgt sofort aus der Rechtseindeutigkeit von f. Für den Beweis der Symmetrie seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \sim_X x_2$. Per Definition ist dann $f(x_1) \sim_Y f(x_1)$ und wegen der Symmetrie von $\sim_Y$ auch $f(x_2) \sim_Y f(x_1)$ und somit $x_2 \sim_X x_1$. Für den Beweis der Transitivität seien $x_1, x_2, x_3 \in X$ mit $x_1 \sim_X x_2$ und $x_2 \sim_X x_3$ gegeben. Dann folgt per Definition $f(x_1) \sim_Y f(x_2)$ und $f(x_2) \sim_Y f(x_3)$ und wegen der Transitivität von $\sim_Y$ auch $f(x_1) \sim_Y f(x_3)$, was $x_1 \sim_X x_3$ bedeutet. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-3.4 (Injektivität und Surjektivität) 3 Punkte

Gegeben sei die Menge W aller Waschmaschinen in einem Waschsalon und die Menge K der Kunden im Waschsalon. Weiterhin sei die Relation

$$R \coloneqq \{(w, k) \in W \times K \mid w \text{ wäscht Wäsche von } k\}$$

gegeben. Beschreiben Sie umgangssprachlich folgende Aussagen:

(a) $R = W \times K$

(b) $R = W \times \emptyset$

(c) Die Relation R ist eine Abbildung.

Für die folgenden Aussagen sei nun bekannt, dass R eine Abbildung ist.

(d) Die Abbildung R ist surjektiv aber nicht injektiv.

(e) Die Abbildung R ist injektiv.

(f) Die Abbildung R ist bijektiv.

Lösung.

(a) „Jeder Kunde wäscht in jeder Maschine." oder „Jede Maschine wäscht von jedem Kunden." (0.5 Punkte)

(b) R ist die leere Menge, also „Niemand wäscht." oder „Keine Maschine wäscht." (0.5 Punkte)

(c) „Jede Maschine wäscht und keine Maschine wird von mehreren Kunden geteilt." oder „Keine Kunden teilen sich eine Maschine und alle Maschinen waschen." (0.5 Punkte)

(d) „Jeder Kunde wäscht und mindestens ein Kunde wäscht in mehr als einer Maschine." oder „Jeder wäscht und mindestens zwei Maschinen waschen für den gleichen Kunden." (0.5 Punkte)

(e) „Kein Kunde belegt mehr als eine Maschine." oder „Keine zwei Maschinen waschen für den gleichen Kunden." (0.5 Punkte)

(f) „Jeder Kunde wäscht in genau einer Maschine." oder „Die Maschinen waschen für alle Kunden und nicht zwei für den gleichen Kunden." (0.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.