Anmerkungen zu diesem Dokument:

Für die Vorbereitung auf die von uns im WS 25/26 angebotenen Abschlussprüfungen möchten wir Ihnen gern zusätzliches Material zur Verfügung stellen. Unten stehend finden Sie zu diesem Zweck einige Aufgaben, deren Bearbeitung Sie in Ihre Vorbereitung einbeziehen können.

Bei der Verwendung dieses Materials muss Ihnen klar sein, dass es nicht möglich ist, Vorbereitungsmaterial zusammen zu stellen, das hinsichtlich Umfang und Schwierigkeitsgrad für jede/n von Ihnen mit den gewerteten Klausuren übereinstimmt. Ziehen Sie Rückschlüsse auf die gewerteten Klausuren an Hand dieses Dokument vorsichtig und seien Sie nicht überrascht, wenn sich dieses Dokument Ihrer Meinung nach in irgendeiner Komponente (Umfang, Schwierigkeit, Themenauswahl...) deutlich von den gewerteten Klausuren unterscheiden. Die unten stehenden Aufgaben geben vor allem Aufschluss darüber, wie typische Klausuraufgaben sich im *Stil* von den Übungsaufgaben unterscheiden, die Sie das Semester über bearbeitet haben.

Ansonsten gilt Folgendes:

- Das Layout dieses Dokuments entspricht ab der nächsten Seite im Wesentlichen dem voraussichtlichen Layout der Klausuren. Seite 2 dieses Dokuments ist die Titelseite und die folgenden Seiten gehören immer nebeneinander.
- Die „Musterlösungen“, die wir veröffentlichen, sind bewusst nur als Skizzen für die Selbstkontrolle formuliert. Sie entsprechen weder einer Optimallösung noch einer Minimallösung.

Klausurvorbereitung

1. Februar 2026

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die reguläre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen Ihre Antworten auf Deutsch oder auf Englisch verfassen.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden“ bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Soll ein Antwortteil nicht gewertet werden, dann müssen Sie ihn durchstreichen.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (20 P.)	2 (11 P.)	3 (14 P.)	4 (10 P.)	5 (16 P.)	6 (13 P.)	7 (16 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch) 20 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen*. In dieser Aufgabe soll die Gültigkeit des Auswahlaxioms vorausgesetzt werden.

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

	W	F	
(1)	X		Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet.
(2)		X	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(3)	■	X	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(4)	■		Wird nicht gewertet.
(5)	X	X	Wird nicht gewertet.
(6)			Wird nicht gewertet.

Gemischtes:

	W	F	
(1)			Sind P, Q Aussagen, dann ist $(P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow Q$
(2)			Die materiale Implikation ist assoziativ.
(3)			Ist $f : X \to X$ eine Funktion, dann ist f bijektiv.
(4)			Für Mengen X und Y ist $(X \times Y, X, Y)$ eine Relation.

Zu Gruppen:

	W	F	
(5)			Ist $(H, *)$ ein Monoid, dann ist H nichtleer.
(6)			Es gibt eine Gruppe, die kein Normalteiler von sich selbst ist.
(7)			In jeder nichtkommutativen Gruppe gibt es einen Kommutator zweier Elemente, der das neutrale Element ist.
(8)			Jede Faktorgruppe hat endliche Kardinalität

Zu Ringen und Körpern:

	W	F	
(9)	☐	☐	Jeder Ring mit Eins ist eine unendliche Menge.
(10)	☐	☐	Jedes Ideal ist ein Unterring.
(11)	☐	☐	Jeder Körper besitzt einen echten Unterkörper.
(12)	☐	☐	Jeder geordnete Körper besitzt einen zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ isomorphen Teilkörper.

Zu Vektorräumen:

	W	F	
(13)	☐	☐	Ist U ein Unterraum von V, der genau einen komplementären Unterraum besitzt, dann ist U ein trivialer Unterraum.
(14)	☐	☐	Jeder endliche Vektorraum ist endlichdimensional.
(15)	☐	☐	Besitzt der Vektorraum V eine nichtleere Basis, dann ist V endlichdimensional.
(16)	☐	☐	Ist ein Körper K über einem seiner Unterkörper $\tilde{K}$ eindimensional, so ist $\tilde{K} = K$.

Zu Matrizen, Vektorraumhomomorphismen und linearen Gleichungssystemen:

	W	F	
(17)	☐	☐	Die Darstellungsmatrizen jedes Vektorraumisomorphismus haben vollen Rang.
(18)	☐	☐	Hat ein Vektorraumhomomorphismus positiven Defekt, dann ist er surjektiv.
(19)	☐	☐	Die Faktoren der Rangfaktorisierung von $A \in K^{n \times m}$ sind eindeutig.
(20)	☐	☐	Ist K ein endlicher Körper, dann ist $K^{3 \times 3}$ eine endlich Menge.

Aufgabe 2. 5 + 6 = 11 Punkte

Gegeben sei eine halbgeordnete Menge $(X, \leqslant)$.

(a) Zeigen Sie, dass genau dann alle $A \subseteq X$ ein Supremum besitzen, wenn alle $A \subseteq X$ ein Infimum besitzen.

(b) Zeigen Sie, dass durch
$$A \preccurlyeq B :\Leftrightarrow \inf(A) \leqslant \inf(B)$$
nie eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(X)$ definiert ist. **Hinweis:** Unterscheiden Sie die Fälle (nicht-)leerer Menge X.

Lösung.

Aufgabe 3. 8 + 6 = 14 Punkte

Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche, zyklische Gruppe mit neutralem Element e und einem $a \in G$ mit $\langle a \rangle = G$. Es seien weiterhin $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\#(G) = nm$ gegeben.

Zeigen Sie:

(a) $\langle a^n \rangle = \{b \in G \mid b^m = e\}$

(b) $\langle a^n \rangle$ ist die einzige Untergruppe von $(G, \cdot)$, welche genau m Elemente hat. **Hinweis:** Der Satz von Lagrange hilft.

Lösung.

Aufgabe 4. 10 Punkte

Bestimmen Sie die Fehlstände, eine Zerlegung in Transpositionen und das Signum der Permutation

$$\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

Aufgabe 5. 3 + 3 + 8 + 2 = 16 Punkte

Es sei die vierelementige Menge $R \coloneqq \{k, \ell, m, n\}$ gegeben. Diese Menge bildet mit den Verknüpfungen $+\colon R \times R \to R$ und $\cdot\colon R \times R \to R$, von denen unten unvollständige Verknüpfungstabellen angegeben sind, einen kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$.

(a) Zeigen Sie, dass m das additiv neutrale Element ist.

(b) Zeigen Sie, dass ℓ das multiplikativ neutrale Element ist.

(c) Vervollständigen Sie die unten stehenden Verknüpfungstabellen.

(d) Bestimmen Sie $\operatorname{char}(R)$ und entscheiden Sie, ob es sich um einen Körper handelt.

Beachte: Die Assoziativitäts- und Distributivitätsgesetze müssen nicht nachgewiesen werden.

$+$	k	ℓ	m	n
k	m			
ℓ		k		
m				
n				k

$\cdot$	k	ℓ	m	n
k		k		
ℓ		ℓ		
m				
n		n		

Lösung.

Aufgabe 6. 6 + 3 + 4 = 13 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$M \coloneqq \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{4 \times 5}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Element von $\mathbb{Z}_3^4 \setminus \operatorname{Bild}(M)$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Bild}(M)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}(M)$.

Lösung.

Aufgabe 7. $4 + 4 + 4 + 4 = 16$ Punkte

Wir betrachten den K-Vektorraum der Folgen $V \coloneqq \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in K, i \in \mathbb{N}\}$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ mit der gliederweisen/komponentenweisen Addition und S-Multiplikation.

(a) Zeigen Sie, dass V unendlichdimensional ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ die Menge $V_I \coloneqq \{x \in V \mid x_i = 0 \; \forall i \in I\}$ ein Unterraum von V ist.

Wir setzen ab hier $U \coloneqq V_{2\mathbb{N}}$ und $W \coloneqq V_{2\mathbb{N}-1}$.

(c) Zeigen Sie, dass U und W komplementäre Unterräume von V sind und geben Sie die eindeutige Zerlegung von $x \in V$ in die Anteile aus U und W an.

(d) Geben Sie alle Elemente der Äquivalenzklasse $[(1, 2, 3, \dots)]$ in V / U an und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 1.