

KLAUSURVORBEREITUNG

1. Februar 2026

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die reguläre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen Ihre Antworten auf Deutsch oder auf Englisch verfassen.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden“ bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Soll ein Antwortteil nicht gewertet werden, dann müssen Sie ihn durchstreichen.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (20 P.)	2 (11 P.)	3 (14 P.)	4 (10 P.)	5 (16 P.)	6 (13 P.)	7 (16 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch)

20 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen*. In dieser Aufgabe soll die **Gültigkeit des Auswahlaxioms** vorausgesetzt werden.

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

- | | W | F | |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| (1) | ☒ | ☐ | Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet. |
| (2) | ☐ | ☒ | Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet. |
| (3) | ☒ | ☒ | Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet. |
| (4) | ☒ | ☐ | Wird nicht gewertet. |
| (5) | ☒ | ☒ | Wird nicht gewertet. |
| (6) | ☐ | ☐ | Wird nicht gewertet. |

Gemischtes:

- | | W | F | |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (1) | ☐ | ☒ | Sind P, Q Aussagen, dann ist $(P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow Q$ |
| (2) | ☐ | ☒ | Die materiale Implikation ist assoziativ. |
| (3) | ☐ | ☒ | Ist $f: X \rightarrow X$ eine Funktion, dann ist f bijektiv. |
| (4) | ☒ | ☐ | Für Mengen X und Y ist $(X \times Y, X, Y)$ eine Relation. |

Zu Gruppen:

- | | W | F | |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| (5) | ☒ | ☐ | Ist $(H, *)$ ein Monoid, dann ist H nichtleer. |
| (6) | ☐ | ☒ | Es gibt eine Gruppe, die kein Normalteiler von sich selbst ist. |
| (7) | ☒ | ☐ | In jeder nichtkommutativen Gruppe gibt es einen Kommutator zweier Elemente, der das neutrale Element ist. |
| (8) | ☐ | ☒ | Jede Faktorgruppe hat endliche Kardinalität. |

Zu Ringen und Körpern:

- | | W | F | |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| (9) | ☐ | ☒ | Jeder Ring mit Eins ist eine unendliche Menge. |
| (10) | ☒ | ☐ | Jedes Ideal ist ein Unterring. |
| (11) | ☐ | ☒ | Jeder Körper besitzt einen echten Unterkörper. |
| (12) | ☒ | ☐ | Jeder geordnete Körper besitzt einen zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ isomorphen Teilkörper. |

Zu Vektorräumen:

- | | W | F | |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| (13) | ☒ | ☐ | Ist U ein Unterraum von V , der genau einen komplementären Unterraum besitzt, dann ist U ein trivialer Unterraum. |
| (14) | ☒ | ☐ | Jeder endliche Vektorraum ist endlichdimensional. |
| (15) | ☐ | ☒ | Besitzt der Vektorraum V eine nichtleere Basis, dann ist V endlichdimensional. |
| (16) | ☒ | ☐ | Ist ein Körper K über einem seiner Unterkörper $\tilde{K}$ eindimensional, so ist $\tilde{K} = K$. |

Zu Matrizen, Vektorraumhomomorphismen und linearen Gleichungssystemen:

- | | W | F | |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (17) | ☒ | ☐ | Die Darstellungsmatrizen jedes Vektorraumisomorphismus haben vollen Rang. |
| (18) | ☐ | ☒ | Hat ein Vektorraumhomomorphismus positiven Defekt, dann ist er surjektiv. |
| (19) | ☐ | ☒ | Die Faktoren der Rangfaktorisierung von $A \in K^{n \times m}$ sind eindeutig. |
| (20) | ☒ | ☐ | Ist K ein endlicher Körper, dann ist $K^{3 \times 3}$ eine endlich Menge. |

Lösung.

Jeweils ein Punkt pro Aussage möglich, also maximal

(20 Punkte)

- (1) Ist falsch, der linke Term ist äquivalent zu P .
- (2) Ist falsch, denn

$$(\perp \rightarrow \perp) \rightarrow \perp = \top \rightarrow \perp = \top \neq \perp = \perp \rightarrow \top = \perp \rightarrow (\perp \rightarrow \perp)$$

- (3) Ist falsch, siehe jede Menge X mit mindestens zwei Elementen und f konstant.
- (4) Ist wahr, per Definition.
- (5) Ist wahr, denn in jedem Monoid existiert ein neutrales Element.
- (6) Ist falsch, das sagt uns das Translationsgruppenkriterium.
- (7) Ist wahr, der Kommutator des neutralen Elements mit sich selbst ist wieder das neutrale Element.
- (8) Ist falsch, jede Gruppe ist isomorph zu einer ihrer trivialen Faktorgruppen, diese kann also unendliche Kardinalität haben.
- (9) Ist falsch, $\mathbb{Z}_2$ oder der Nullring sind Gegenbeispiele.
- (10) Ist wahr, per Definition.
- (11) Ist falsch, denn $\mathbb{Z}_2$ ist sein einziger Unterkörper.
- (12) Ist wahr, haben wir in einer Übungsaufgabe nachgewiesen, denn jeder geordnete Körper hat Nullcharakteristik.
- (13) Ist wahr, denn anderenfalls existiert eine nichtleere Basis von U und eine nichtleere Basis von einem beliebigen komplementären Unterraum W mit Elementen $u \in B_U$ und $w \in B_W$ und wenn man in B_W das Element w durch das Element $u + w$ austauscht, dann erhält man die Basis eines anderen komplementären Unterraums.

- (14) Ist wahr, denn der Vektorraum ist für sich selbst ein endliches Erzeugendensystem.
- (15) Ist falsch, siehe jeder beliebige unendlichdimensionale Vektorraum.
- (16) Ist wahr, denn ist $\{k\}$ eine Basis und damit insbesondere $k \neq 0$, so ist nach Voraussetzung $k \cdot \tilde{K} = K$ und damit nach durchmultiplizieren mit k^{-1} auch $\tilde{K} = k^{-1}K = K$ nach dem Translationsgruppenkriterium und $0 \cdot k = 0$.
- (17) Ist wahr, denn ein Isomorphismus ist insbesondere bijektiv und damit invertierbar, was sich auf seine Darstellungsmatrizen überträgt.
- (18) Ist falsch, beispielsweise der triviale Vektorraumendomorphismus auf einen nicht-Nullraum zeigt das.
- (19) Ist falsch, man könnte z. B. beide Faktoren gegenläufig durchskalieren sofern $K \setminus \{1\}$ nichtleer ist.
- (20) Ist wahr, diese Menge hat dann nämlich genau $\#(K)^9$ Elemente.

Aufgabe 2.

5 + 6 = 11 Punkte

Gegeben sei eine halbgeordnete Menge $(X, \leq)$.

- (a) Zeigen Sie, dass genau dann alle $A \subseteq X$ ein Supremum besitzen, wenn alle $A \subseteq X$ ein Infimum besitzen.
- (b) Zeigen Sie, dass durch

$$A \preccurlyeq B :\Leftrightarrow \inf(A) \leq \inf(B)$$

nie eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(X)$ definiert ist. **Hinweis:** Unterscheiden Sie die Fälle (nicht-)leerer Menge X .

Lösung.

- (a) „ $\Rightarrow$ “ Es sei $A \subseteq X$ gegeben. Mit U bezeichnen wir die Menge der unteren Schranken an A . Dann ist per Definition $\sup(U) \geq u$ für alle unteren Schranken $u \in U$, also eine obere Schranke an die unteren Schranken. Außerdem ist $\sup(U)$ selbst auch eine untere Schranke an A , da alle $a \in A$ obere Schranken an U sind. Also ist $\sup(U)$ eine untere Schranke für A und eine obere Schranke an die unteren Schranken von A und damit das Infimum von A .
„ $\Leftarrow$ “ Folgt analog für die oberen Schranken. (5 Punkte)
- (b) Ist X die leere Menge, dann ist die Relation nicht einmal wohldefiniert, denn dann existieren keine Elemente in X und damit insbesondere auch kein Infimum für $X = \emptyset \in \mathcal{P}(X)$. Anderenfalls muss für jede Teilmenge von X das Infimum existieren, sonst ist der verwendete Ausdruck nicht wohldefiniert.

Ist X nicht leer und existieren die Infima jeder Teilmenge von X , dann existieren die nichtgleichen Mengen $\emptyset$ und $\{\inf(\emptyset)\}$, die das gleiche Infimum haben aber nicht gleich sind, damit ist die Relation nicht antisymmetrisch.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.

8 + 6 = 14 Punkte

Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche, zyklische Gruppe mit neutralem Element e und einem $a \in G$ mit $\langle a \rangle = G$. Es seien weiterhin $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\#(G) = nm$ gegeben.

Zeigen Sie:

- (a) $\langle a^n \rangle = \{b \in G \mid b^m = e\}$
- (b) $\langle a^n \rangle$ ist die einzige Untergruppe von $(G, \cdot)$, welche genau m Elemente hat. **Hinweis:** Der Satz von Lagrange hilft.

Lösung.

- (a) Für jedes Element $b \in \langle a^n \rangle$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $b = (a^n)^k$ und damit

$$b^m = ((a^n)^k)^m = (a^{nm})^k = e^k = e,$$

womit $\langle a^n \rangle \subseteq \{b \in G \mid b^m = e\}$ gilt. (4 Punkte)

Sei nun b mit $b^m = e$ gegeben. Da $b = a^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$ gilt, ist entsprechend

$$e = b^m = (a^l)^m = a^{lm}$$

und damit wegen $\text{ord}(a) = nm$ also lm ein Vielfaches von nm und damit l ein Vielfaches von n , womit $\langle a^n \rangle \supseteq \{b \in G \mid b^m = e\}$ und damit Gleichheit der Mengen gilt. (4 Punkte)

- (b) Wegen der Erzeugendeneigenschaft von a gilt $\text{ord}(a^n) = m$, damit ist klar, dass $\langle a^n \rangle$ genau m Elemente hat. (2 Punkte)

Es sei nun eine beliebige Untergruppe U mit genau m Elementen gegeben. Ist $b \in U$, dann ist $\langle b \rangle \subseteq U$ und damit wegen des Satzes von Lagrange $\text{ord}(b) = \#\langle b \rangle$ ein Teiler von m und damit

$$b^m = (b^{\text{ord}(b)})^{\frac{m}{\text{ord}(b)}} = e^{\frac{m}{\text{ord}(b)}} = e.$$

Damit ist $U \subseteq \{b \in G \mid b^m = e\}$ aber die Gruppen haben die gleiche Kardinalität, stimmen also überein. (4 Punkte)

Aufgabe 4.

10 Punkte

Bestimmen Sie die Fehlstände, eine Zerlegung in Transpositionen und das Signum der Permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

Die gesuchten Fehlstände sind

Zu $i = 1$: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$

Zu $i = 2$: $(2, 6)$

Zu $i = 3$: $(3, 5), (3, 6)$

Zu $i = 4$: $(4, 5), (4, 6)$

Zu $i = 5$: $(5, 6)$.

(3 Punkte)

Für eine Zerlegung in Permutationen gibt es verschiedenste Reihenfolgen nach denen vorgegangen werden kann, wir arbeiten hier der Einfachheit halber aufsteigend und im Bildbereich. Es ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \tau(1, 6) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \tau(1, 6) \circ \tau(3, 4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \tau(1, 6) \circ \tau(3, 4) \circ \tau(4, 5) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(5 Punkte)

Damit ergibt sich das Signum zu $(-1)^{\text{Anzahl der Permutationen}} = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände}} = (-1)^3 = -1$.
(2 Punkte)

Aufgabe 5.

$3 + 3 + 8 + 2 = 16$ Punkte

Es sei die vierelementige Menge $R := \{k, \ell, m, n\}$ gegeben. Diese Menge bildet mit den Verknüpfungen $+: R \times R \rightarrow R$ und $\cdot: R \times R \rightarrow R$, von denen unten unvollständige Verknüpfungstabellen angegeben sind, einen kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$.

- Zeigen Sie, dass m das additiv neutrale Element ist.
- Zeigen Sie, dass ℓ das multiplikativ neutrale Element ist.
- Vervollständigen Sie die unten stehenden Verknüpfungstabellen.
- Bestimmen Sie $\text{char}(R)$ und entscheiden Sie, ob es sich um einen Körper handelt.

Beachte: Die Assoziativitäts- und Distributivitätsgesetze müssen nicht nachgewiesen werden.

$+$	k	ℓ	m	n
k	m			
ℓ		k		
m				
n				k

$\cdot$	k	ℓ	m	n
k		k		
ℓ		ℓ		
m				
n				n

Lösung.

- Aus der additiven Verknüpfungstabelle können wir ablesen, dass weder ℓ , k noch n additiv neutral sind, also muss das verbleibende Element m additiv neutral. (3 Punkte)
- Da $0_R \cdot r = 0_R$ für alle $r \in R$ gilt natürlich auch $m \cdot \ell = m$ und damit ist ℓ multiplikativ rechtsneutral und wegen der vorausgesetzten Kommutativität auch linksneutral, also neutral, damit handelt es sich um einen Ring mit Eins, dem Element ℓ . (3 Punkte)
- Mit den Informationen der vorherigen Teilaufgaben ergibt sich direkt

$+$	k	ℓ	m	n
k	m		k	
ℓ		k	ℓ	
m	k	ℓ	m	n
n			n	k

$\cdot$	k	ℓ	m	n
k		k	m	
ℓ	k	ℓ	m	n
m	m	m	m	m
n		n	m	

Das additive Sudokukriterium liefert, dass

$+$	k	ℓ	m	n
k	m	n	k	ℓ
ℓ	n	k	ℓ	m
m	k	ℓ	m	n
n	ℓ	m	n	k

$\cdot$	k	ℓ	m	n
k		k	m	
ℓ	k	ℓ	m	n
m	m	m	m	m
n		n	m	

und wegen

$$\begin{aligned}
 k \cdot k &= k \cdot (\ell + \ell) = k + k = m \\
 n \cdot k &= n \cdot (\ell + \ell) = n + n = k \\
 n \cdot n &= n \cdot (\ell + k) = n \cdot \ell + n \cdot k = n + k = \ell
 \end{aligned}$$

erhalten wir

+	k	ℓ	m	n
k	m	n	k	ℓ
ℓ	n	k	ℓ	m
m	k	ℓ	m	n
n	ℓ	m	n	k

·	k	ℓ	m	n
k	m	k	m	k
ℓ	k	ℓ	m	n
m	m	m	m	m
n	k	n	m	ℓ

(8 Punkte)

- (d) Man kann in der Additionstabelle verfolgen, dass die Charakteristik gerade 4 ist, und damit keine Primzahl. Es liegt also kein Körper vor. (2 Punkte)

Aufgabe 6.

6 + 3 + 4 = 13 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{4 \times 5}.$$

- Bestimmen Sie ein Element von $\mathbb{Z}_3^4 \setminus \text{Bild}(M)$.
- Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(M)$.
- Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern}(M)$.

Lösung.

- Für einen beliebigen, allgemeinen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4$ versuchen wir eine Lösung des dazugehörige linearen Gleichungssystems zu bestimmen, also

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} \text{+1} \curvearrowright \\ \text{+2} \curvearrowright \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & c \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & d \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} \text{+1} \curvearrowright \\ \text{+1} \curvearrowright \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & b+a \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d+2a \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} \text{+1} \curvearrowright \\ \text{+2} \curvearrowright \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+b+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d+2a \end{array} \right]$$

Der allgemeine Vektor liegt also genau dann in $\text{Bild}(M)$, wenn $a + b + c = 0$ und $2a + d = 0$ gilt, also beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liegt nicht im Bild.

(6 Punkte)

- Wir haben in der vorherigen Teilaufgabe bereits eine Zeilenstufenform von M bestimmt. An dieser ist direkt erkennbar (an den Vektoren mit den führenden Nicht-Nulleinträgen an den abhängigen Indizes), dass jedes Element vom Bild von den ersten beiden Spalten erzeugt werden kann, also ist eine Basis durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

(3 Punkte)

- Aus der Zeilenstufenform können wir durch Setzen der rechten Seite auch direkt die Lösungen der Null bestimmen und können nacheinander alle unabhängigen Indizes auf 1 setzen und die dazugehörige Lösung bestimmen, also gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4 Punkte)

Hinweis: Hier kann es hilfreich sein, das obige erweiterte Lineare Gleichungssystem in reduzierte Zeilenstufenform zu bringen, statt zeilenweise zu lösen, dann sind die Lösungen direkt ablesbar und die Gefahr sich zu Verrechnen geringer.

Aufgabe 7.

$4 + 4 + 4 + 4 = 16$ Punkte

Wir betrachten den K -Vektorraum der Folgen $V := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in K, i \in \mathbb{N}\}$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ mit der gliederweisen/komponentenweisen Addition und S-Multiplikation.

- (a) Zeigen Sie, dass V unendlichdimensional ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ die Menge $V_I := \{x \in V \mid x_i = 0 \forall i \in I\}$ ein Unterraum von V ist.

Wir setzen ab hier $U := V_{2\mathbb{N}}$ und $W := V_{2\mathbb{N}-1}$.

- (c) Zeigen Sie, dass U und W komplementäre Unterräume von V sind und geben Sie die eindeutige Zerlegung von $x \in V$ in die Anteile aus U und W an.
- (d) Geben Sie alle Elemente der Äquivalenzklasse $[(1, 2, 3, \dots)]$ in V/U an und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

- (a) Wir zeigen, dass die unendliche Familie von Vektoren $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Standardfolgen linear unabhängig ist. Dafür sei eine endliche Teilfamilie $(e_n)_{n \in E_0}$ mit dazugehörigen Koeffizienten $(\alpha_n)_{n \in E_0}$ und eine Linearkombination der konstanten Nullfolge gegeben, also

$$0 = \sum_{n \in E_0} \alpha_n e_n,$$

dann bestehen die Folgenglieder der Folge auf der rechten Gleichungsseite gerade aus den Koeffizienten α_n an den Indizes $n \in E_0$ und ein Koeffizientenvergleich mit der konstanten Nullfolge liefert direkt, dass diese alle Null sein müssen (trivialerweise auch im Fall von leerem E_0) und damit die Linearkombination trivial, also die Familie linear unabhängig. Der Satz von Steinitz schließt nun aus, dass es sich um einen endlichdimensionalen Vektorraum handelt. (4 Punkte)

- (b) Die konstante Nullfolge liegt in V_I für beliebige V_I denn I ist ja eine Teilmenge von $\mathbb{N}$.

Da wir Folgen gliederweise addieren und skalieren folgt außerdem, dass für zwei Folgen $x, y \in V_I$ und $\alpha \in K$ gilt, dass

$$(x + \alpha y)_i = (x)_i + \alpha(y)_i = 0 + \alpha 0 = 0$$

für alle $i \in I$, damit ist die Menge abgeschlossen unter den Vektorraumoperationen und nach dem Unterraumkriterium ein Unterraum. (4 Punkte)

- (c) Dass es sich bei U und W um Unterräume handelt haben wir in der letzten Teilaufgabe schon gezeigt.

Die Erzeugendeneigenschaft erhalten wir direkt aus der Zerlegung einer Folge in ihre Bestandteile der Form

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \underbrace{(x_1, 0, x_3, 0, \dots)}_{\in U} + \underbrace{(0, x_2, 0, x_4, \dots)}_{\in W}$$

und die Trivialschnitteigenschaft folgt direkt daraus, dass die Mengen $2\mathbb{N}$ und $2\mathbb{N} - 1$ eine Partition von $\mathbb{N}$ liefern, also ist eine Folge in $U \cap W$ gerade Null an jedem Index und damit die konstante Nullfolge. (4 Punkte)

- (d) Die Klassen von V/U bestehen gerade aus den Mengen $[x] = x + U$ und auf Grund des Translationsgruppenkriteriums ist für eine Zerlegung $x = u + w$ gerade $[x] = [u + w] = u + w + U = w + U = [w]$ und damit ist die Klasse gegeben durch alle Elemente der Form

$$[(1, 2, 3, \dots)] = \{(x_1, 2, x_3, 4, \dots) \mid x_i \in K, i \in 2\mathbb{N} - 1\}.$$

(4 Punkte)