Anmerkungen zu diesem Dokument:

Für die Vorbereitung auf die von uns im WS 25/26 angebotenen Abschlussprüfungen möchten wir Ihnen gern zusätzliches Material zur Verfügung stellen. Unten stehend finden Sie zu diesem Zweck einige Aufgaben, deren Bearbeitung Sie in Ihre Vorbereitung einbeziehen können.

Bei der Verwendung dieses Materials muss Ihnen klar sein, dass es nicht möglich ist, Vorbereitungsmaterial zusammen zu stellen, das hinsichtlich Umfang und Schwierigkeitsgrad für jede/n von Ihnen mit den gewerteten Klausuren übereinstimmt. Ziehen Sie Rückschlüsse auf die gewerteten Klausuren an Hand dieses Dokument vorsichtig und seien Sie nicht überrascht, wenn sich dieses Dokument Ihrer Meinung nach in irgendeiner Komponente (Umfang, Schwierigkeit, Themenauswahl...) deutlich von den gewerteten Klausuren unterscheiden. Die unten stehenden Aufgaben geben vor allem Aufschluss darüber, wie typische Klausuraufgaben sich im *Stil* von den Übungsaufgaben unterscheiden, die Sie das Semester über bearbeitet haben.

Ansonsten gilt Folgendes:

- Das Layout dieses Dokuments entspricht ab der nächsten Seite im Wesentlichen dem voraussichtlichen Layout der Klausuren. Seite 2 dieses Dokuments ist die Titelseite und die folgenden Seiten gehören immer nebeneinander.
- Die „Musterlösungen", die wir veröffentlichen werden, sind bewusst nur als Skizzen für die Selbstkontrolle formuliert. Sie entsprechen weder einer Optimallösung noch einer Minimallösung.

Klausurvorbereitung

24. Dezember 2025

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die reguläre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen Ihre Antworten auf Deutsch oder auf Englisch verfassen.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden" bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (20 P.)	2 (13 P.)	3 (13 P.)	4 (15 P.)	5 (14 P.)	6 (15 P.)	7 (10 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch) 20 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen*. In dieser Aufgabe soll die Gültigkeit des Auswahlaxioms vorausgesetzt werden.

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

	W	F	
(1)	☒	☐	Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet.
(2)	☐	☒	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(3)	■	☒	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(4)	■	☐	Wird nicht gewertet.
(5)	☒	☒	Wird nicht gewertet.
(6)	☐	☐	Wird nicht gewertet.

Gemischtes:

	W	F	
(1)	☐	☐	Ist x eine Aussage, dann ist x äquivalent zu „x ist wahr“.
(2)	☐	☐	Es gibt keine Menge A, sodass jede beliebige Aussageform $P(x)$ für alle $x \in A$ wahr ist.
(3)	☐	☐	Ist A eine nichtleere Menge, dann existiert für jedes $x \in A$ eine Halbordnung auf A bezüglich derer x das Minimum von A ist.
(4)	☐	☐	Jede Funktion ist rechtstotal und linkseindeutig.

Zu (Halb-)Gruppen:

	W	F	
(5)	☐	☐	Für jede nichtleere, endliche Menge A existiert eine Verknüpfung $\star$ auf A, so dass $(A, \star)$ ein Monoid bildet.
(6)	☐	☐	Jede Gruppe ist zu einer ihrer Faktorgruppen isomorph.
(7)	☐	☐	Zwischen je zwei beliebigen Gruppen existieren mindestens zwei verschiedene Gruppenhomomorphismen.
(8)	☐	☐	Keine symmetrische Gruppe ist zyklisch erzeugt.

Zu Ringen und Körpern

	W	F	
(9)	☐	☐	Auf jeder Gruppe lässt sich eine weitere Verknüpfung definieren, so dass ein Ring entsteht.
(10)	☐	☐	Jeder Ringisomorphismus ist surjektiv.
(11)	☐	☐	Es gibt einen Körper mit Charakteristik 8.
(12)	☐	☐	Jeder Körper hat mindestens zwei verschiedene Elemente.

Zu Vektorräumen:

	W	F	
(13)	☐	☐	Zu jeder abelschen Gruppe $(G, \oplus)$ existiert ein Körper $(K, +, \cdot)$ und eine S-Multiplikation $\odot$, so dass $(G, \oplus, \odot)$ einen K-Vektorraum bildet.
(14)	☐	☐	Zu jedem Körper $(K, +, \cdot)$ existiert eine abelschen Gruppe $(G, \oplus)$ und eine S-Multiplikation $\odot$, so dass $(G, \oplus, \odot)$ einen K-Vektorraum bildet.
(15)	☐	☐	Ist V ein Vektorraum, dann beinhaltet jede seiner Teilmengen eine Basis.
(16)	☐	☐	Der einzige Unterraum eines Vektorraums V mit Kodimension 0 ist V selbst.

Zu Matrizen

	W	F	
(17)	☐	☐	Für jede Matrix stimmen ihr Spalten- und ihr Zeilenrang überein.
(18)	☐	☐	Matrixmultiplikation ist assoziativ.
(19)	☐	☐	Jede Matrix in Zeilenstufenform ist quadratisch.
(20)	☐	☐	Elementarmatrizen besitzen vollen Rang

Aufgabe 2. 5 + 4 + 4 = 13 Punkte

Es seien X und Y nichtleere Mengen und $\preccurlyeq_Y$ eine Halbordnung auf Y sowie $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Wir betrachten $\preccurlyeq_X$ auf X, welches durch

$$x_1 \preccurlyeq_X x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) \preccurlyeq_Y f(x_2)$$

definiert ist.

(a) Weisen Sie diejenigen definierenden Eigenschaften einer Halbordnung auf X nach, die von der Menge $\preccurlyeq_X$ i. A. erfüllt werden und erklären Sie, warum $\preccurlyeq_X$ i. A. keine Ordnungsrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\preccurlyeq_X$ eine Ordnungsrelation auf X ist, wenn f injektiv ist.

(c) Zeigen Sie im Fall von injektivem f: Für $M \subseteq X$ ist $x \in M$ genau dann ein minimales Element von M, wenn $f(x)$ ein minimales Element von $f(M)$ ist.

Lösung.

Aufgabe 3. 8 + 1 + 1 + 2 + 1 = 13 Punkte

Es sei die Menge $G \coloneqq \{5, 8, 3, 7\}$ gegeben. Diese Menge bildet mit der Verknüpfung $\star\colon G \times G \to G$, von der unten eine unvollständige Verknüpfungstabelle angegeben ist, eine Gruppe.

(a) Vervollständigen Sie die unten stehende Verknüpfungstabelle von $\star$.

(b) Geben Sie das neutrale Element in $(G, \star)$ an.

(c) Bestimmen Sie alle Elemente maximaler Ordnung in $(G, \star)$.

(d) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe $(G, \star)$.

(e) Bestimmen Sie die Faktorgruppe $(G \,/\, \langle 3 \rangle, \tilde{\star})$.

Begründen Sie Ihre Antworten knapp.

Beachte: Die Assoziativität von $\star$ muss nicht nachgewiesen werden.

Lösung.

$\star$	8	5	3	
8				5
		3		
3				7
7				

Aufgabe 4. $3 + 4 + 3 + 5 = 15$ Punkte

Gegeben sei der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation. Zeigen Sie:

(a) Es existiert genau ein Ringendomorphismus von Ringen mit Eins auf $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(b) Es existiert genau ein Ringautomorphismus auf $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(c) Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ideal in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(d) Neben den Idealen aus Teilaufgabe (c) gibt es in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ keine weiteren.

Hinweis: Nutzen Sie die übliche Totalordnung auf $\mathbb{Z}$ für einen Widerspruchsbeweis.

Lösung.

Aufgabe 5. 14 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, \oplus, \odot)$ ein $(K, +, \cdot)$-Vektorraum sowie $v \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $(K \odot \{v\}, \oplus, \bullet)$ mit

$$\bullet(\alpha \odot v, \beta \odot v) \coloneqq (\alpha \cdot \beta) \odot v$$

einen zu $(K, +, \cdot)$ isomorphen Körper bildet.

Lösung.

Aufgabe 6. 4 + 4 + 4 + 2 + 1 = 15 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien die Unterräume

$$U \coloneqq \{A \in K^{n \times n} \mid a_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![2, n]\!]\}$$
$$W \coloneqq \{A \in K^{n \times n} \mid \text{Die Spalten von } A \text{ summieren sich zu } 0 \in \mathbb{R}^n.\}$$

des Raums $V \coloneqq \mathbb{K}^{n \times n}$ der Matrizen gegeben.

(a) Zeigen Sie für U oder W die Unterraumeigenschaft.

(b) Zeigen Sie, dass $U \oplus W = V$ und geben Sie für beliebige Matrizen $A \in V$ die Zerlegung in Anteile aus U und W an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von U und eine Basis von W.

(d) Bestimmen Sie die Dimension und Kodimension von U und von W.

(e) Bestimmen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion $W \subseteq U$ gilt.

Lösung.

Aufgabe 7. 10 Punkte

Es sei X eine einelementige Menge. Bestimmen Sie eine Rangfaktorisierung und den Rang von

$$\begin{pmatrix} X & \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ X & X & \emptyset & X & \emptyset \\ X & X & X & X & X \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)^{4\times 5}.$$

Lösung.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 1.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 2.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 3.