# Klausurvorbereitung

24. Dezember 2025

| Name: | Vorname: |
|---|---|
| Matrikelnummer: | |

- Die reguläre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen Ihre Antworten auf Deutsch oder auf Englisch verfassen.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden“ bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

| 1 (20 P.) | 2 (13 P.) | 3 (13 P.) | 4 (15 P.) | 5 (14 P.) | 6 (15 P.) | 7 (10 P.) | $\Sigma$ (100 P.) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Aufgabe 1.** (Wahr oder Falsch) 20 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen*. In dieser Aufgabe soll die Gültigkeit des Auswahlaxioms vorausgesetzt werden.

**Beachte:** In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

| | W | F | |
|---|---|---|---|
| (1) | X | | Hier wird die Entscheidung „wahr" gewertet. |
| (2) | | X | Hier wird die Entscheidung „falsch" gewertet. |
| (3) | ■ | X | Hier wird die Entscheidung „falsch" gewertet. |
| (4) | ■ | | Wird nicht gewertet. |
| (5) | X | X | Wird nicht gewertet. |
| (6) | | | Wird nicht gewertet. |

---

Gemischtes:

| | W | F | |
|---|---|---|---|
| (1) | X | | Ist $x$ eine Aussage, dann ist $x$ äquivalent zu „$x$ ist wahr". |
| (2) | | X | Es gibt keine Menge $A$, sodass jede beliebige Aussageform $P(x)$ für alle $x \in A$ wahr ist. |
| (3) | X | | Ist $A$ eine nichtleere Menge, dann existiert für jedes $x \in A$ eine Halbordnung auf $A$ bezüglich derer $x$ das Minimum von $A$ ist. |
| (4) | | X | Jede Funktion ist rechtstotal und linkseindeutig. |

Zu (Halb-)Gruppen:

| | W | F | |
|---|---|---|---|
| (5) | X | | Für jede nichtleere, endliche Menge $A$ existiert eine Verknüpfung $\star$ auf $A$, so dass $(A, \star)$ ein Monoid bildet. |
| (6) | X | | Jede Gruppe ist zu einer ihrer Faktorgruppen isomorph. |
| (7) | | X | Zwischen je zwei beliebigen Gruppen existieren mindestens zwei verschiedene Gruppenhomomorphismen. |
| (8) | | X | Keine symmetrische Gruppe ist zyklisch erzeugt. |

Zu Ringen und Körpern

| | W | F | |
|---|---|---|---|
| (9) | X | | Auf jeder Gruppe lässt sich eine weitere Verknüpfung definieren, so dass ein Ring entsteht. |
| (10) | X | | Jeder Ringisomorphismus ist surjektiv. |
| (11) | | X | Es gibt einen Körper mit Charakteristik 8. |
| (12) | X | | Jeder Körper hat mindestens zwei verschiedene Elemente. |

Zu Vektorräumen:

| | W | F | |
|---|---|---|---|
| (13) | | X | Zu jeder abelschen Gruppe $(G, \oplus)$ existiert ein Körper $(K, +, \cdot)$ und eine S-Multiplikation $\odot$, so dass $(G, \oplus, \odot)$ einen $K$-Vektorraum bildet. |
| (14) | X | | Zu jedem Körper $(K, +, \cdot)$ existiert eine abelschen Gruppe $(G, \oplus)$ und eine S-Multiplikation $\odot$, so dass $(G, \oplus, \odot)$ einen $K$-Vektorraum bildet. |
| (15) | | X | Ist $V$ ein Vektorraum, dann beinhaltet jede seiner Teilmengen eine Basis. |
| (16) | X | | Der einzige Unterraum eines Vektorraums $V$ mit Kodimension 0 ist $V$ selbst. |

Zu Matrizen

| | W | F | |
|---|---|---|---|
| (17) | X | | Für jede Matrix stimmen ihr Spalten- und ihr Zeilenrang überein. |
| (18) | X | | Matrixmultiplikation ist assoziativ. |
| (19) | | X | Jede Matrix in Zeilenstufenform ist quadratisch. |
| (20) | X | | Elementarmatrizen besitzen vollen Rang |

**Lösung.**

Jeweils einen Punkt pro Aussage möglich, also maximal (20 Punkte)

Die folgenden Erklärungen dienen der Selbstkontrolle und sind ausdrücklich nicht teil der geforderten Lösung.

(1) Ist wahr, wie man an den Wahrheitstabellen direkt ablesen kann.

(2) Ist falsch, denn die leere Menge erfüllt diese Aussage.

(3) Ist wahr, eine Halbordnung, die das erfüllt ist $\{(x, y) \mid y \in A\} \cup \Delta_A$.

(4) Ist falsch, denn nicht jede Funktion ist bijektiv.

(5) Ist wahr, so eine Verknüpfung kann man z. B. induktiv aufbauen indem man für $x_n$ das triviale Monoid bildet, und dann für jedes weitere hinzugenommene Element den Monoid um ein neues neutrales Element ergänzt.

(6) Ist wahr, dann man kann die Untergruppe des neutralen Elements ausfaktorisieren.

(7) Ist falsch, wie man mit dem Homomorphiesatz und dem Satz von Lagrange zeigen kann, wenn die beiden Gruppen teilerfremde endliche Kardinalitäten haben.

(8) Ist falsch, denn die $S_1$ ist zyklisch.

(9) Ist wahr, wenn die Multiplikation konstant das additiv neutrale Element ausgibt.

(10) Ist wahr, denn Isomorphismen sind per Definition surjektiv.

(11) Ist falsch, denn jeder Körper mit positiver Charakteristik hat eine Primcharakteristik.

(12) Ist wahr, denn in einem Körper dürfen 0 und 1 nicht übereinstimmen.

(13) Ist falsch, denn endliche Vektorräume können nur über endlichen Körpern gebildet werden. Diese haben positive Primcharakteristik und jedes Element der Gruppe muss die gleiche Primzahl als Ordnung haben. In $\mathbb{Z}_4$ beispielsweise existieren aber Elemente unterschiedlicher Ordnung.

(14) Ist wahr, denn hier kann man immer den Nullraum über der kleinsten Gruppe bilden.

(15) Ist falsch, denn die leere Menge beinhaltet nur für den Nullraum eine Basis.

(16) Ist wahr, denn jeder echte Unterraum beinhaltet ein Vektor nicht und damit nicht dessen erzeugten Unterraum, womit die Kodimension mindestens 1 ist.

(17) Ist wahr, nach Aussage im Skript.

(18) Ist wahr, nach Aussage im Skript.

(19) Ist falsch, Zeilenstufenform hängt nicht von den Abmessungen der Matrix ab.

(20) Ist wahr, Typ I und II liegen schon in Zeilenstufenform vor, in Typ III ist die lineare Unabhängigkeit der Spalten / Zeilen direkt ablesbar.

**Aufgabe 2.** $5 + 4 + 4 \; = 13$ Punkte

Es seien $X$ und $Y$ nichtleere Mengen und $\preccurlyeq_Y$ eine Halbordnung auf $Y$ sowie $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Wir betrachten $\preccurlyeq_X$ auf $X$, welches durch

$$x_1 \preccurlyeq_X x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) \preccurlyeq_Y f(x_2)$$

definiert ist.

(a) Weisen Sie diejenigen definierenden Eigenschaften einer Halbordnung auf $X$ nach, die von der Menge $\preccurlyeq_X$ i. A. erfüllt werden und erklären Sie, warum $\preccurlyeq_X$ i. A. keine Ordnungsrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\preccurlyeq_X$ eine Ordnungsrelation auf $X$ ist, wenn $f$ injektiv ist.

(c) Zeigen Sie im Fall von injektivem $f$: Für $M \subseteq X$ ist $x \in M$ genau dann ein minimales Element von $M$, wenn $f(x)$ ein minimales Element von $f(M)$ ist.

---

**Lösung.**

Skizze für die Selbstkontrolle:

(a) Zuerst einmal handelt es sich hier um eine **Relation** auf $X$, denn wegen der Rechtseindeutigkeit ist $\preccurlyeq_X \subseteq X \times X$ wohldefiniert. (1 Punkt)

Diese Relation ist **reflexiv**, denn für $x \in X$ ist natürlich $f(x) = f(x)$ und damit wegen der Halbordnungseigenschaft von $\preccurlyeq_Y$ auch $f(x) \preccurlyeq_Y f(x)$ und damit $x \preccurlyeq_X x$ für alle $x \in X$. (1 Punkt)

Die Relation ist außerdem **transitiv**, denn für $x, y, z \in X$ mit $x \preccurlyeq_X y$ und $y \preccurlyeq_X z$ ist ja per Definition $f(x) \preccurlyeq_Y f(y)$ und $f(y) \preccurlyeq_Y f(z)$ und damit wegen der Halbordnungseigenschaft von $\preccurlyeq_Y$ auch $f(x) \preccurlyeq_Y f(z)$ und damit gerade $x \preccurlyeq_X z$. (1 Punkt)

Im Allgemeinen ist die Relation aber **nicht antisymmetrisch**, denn wenn $f$ nicht injektiv ist, dann existieren $x \neq y$ aus $X$ mit $f(x) = f(y)$ und damit gilt wegen der Reflexivität von $\preccurlyeq_Y$ auch $x \preccurlyeq_X y$ und $y \preccurlyeq_X x$ obwohl $x \neq y$. (2 Punkte)

(b) Ist $f$ injektiv, dann ist die definierte Relation **antisymmetrisch**, denn ist $x \preccurlyeq_X y$ und $y \preccurlyeq_X x$, dann ist per Definition $f(x) \preccurlyeq_Y f(y)$ sowie $f(y) \preccurlyeq_Y f(x)$ und damit wegen der Antisymmetrie von $\preccurlyeq_Y$ auch $f(x) = f(y)$, was wegen der Injektivität $x = y$ impliziert. (4 Punkte)

(c) Es sei $x \in M \subseteq X$ gegeben.

Das Element $x$ ist genau dann minimales Element von $M$, wenn $x \preccurlyeq_X y$ für alle $y \in M$, die mit $x$ vergleichbar sind, was per Definition genau dann der Fall ist, wenn $f(x) \preccurlyeq_Y f(y)$ für alle $y \in M$, mit denen $x$ vergleichbar ist. (2 Punkte)

Per Definition ist weiterhin genau dann $x$ bezüglich $\preccurlyeq_X$ mit $y$ vergleichbar, wenn $f(x)$ bezüglich $\preccurlyeq_Y$ mit $f(y)$ vergleichbar ist, was die Behauptung liefert. (2 Punkte)

**Aufgabe 3.** $8 + 1 + 1 + 2 + 1 = 13$ Punkte

Es sei die Menge $G \coloneqq \{5, 8, 3, 7\}$ gegeben. Diese Menge bildet mit der Verknüpfung $\star\colon G \times G \to G$, von der unten eine unvollständige Verknüpfungstabelle angegeben ist, eine Gruppe.

(a) Vervollständigen Sie die unten stehende Verknüpfungstabelle von $\star$.

(b) Geben Sie das neutrale Element in $(G, \star)$ an.

(c) Bestimmen Sie alle Elemente maximaler Ordnung in $(G, \star)$.

(d) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe $(G, \star)$.

(e) Bestimmen Sie die Faktorgruppe $(G / \langle 3 \rangle, \tilde{\star})$.

Begründen Sie Ihre Antworten knapp.

**Beachte:** Die Assoziativität von $\star$ muss nicht nachgewiesen werden.

---

**Lösung.**

Skizze für die Selbstkontrolle:

(a) In den Verknüpfungstabellen können wir zuerst einmal die verbleibenden Elemente einfüllen, die in der Verknüpfungszeile/-spalte fehlen und erhalten:

| $\star$ | 8 | 5 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | 5 |
| 5 | | 3 | | |
| 3 | | | | 7 |
| 7 | | | | |

.

Da alle Gruppen mit 5 oder weniger Elementen kommutativ sind, wissen wir bereits hier, dass die Gruppe kommutativ sein muss.

Weiter sieht man, dass $3 \star 7 = 7$, also dass 3 für 7 links- und damit wegen der Kommutativität auch rechtsneutral sein muss. Für beliebiges $g \in G$ folgt nun, dass

$$3 \star g = 3 \star 7 \star 7' \star g = 7 \star 7' \star g = g$$

und die rechtsseitige Neutralität von 3 folgt analog, daher ist 3 neutral in $G$ und wir erhalten

| $\star$ | 8 | 5 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | | 8 | 5 |
| 5 | | 3 | 5 | |
| 3 | 8 | 5 | 3 | 7 |
| 7 | 5 | | 7 | |

.

Das Sudokukriterium für 3 liefert dann

| $\star$ | 8 | 5 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | | 8 | 5 |
| 5 | | 3 | 5 | |
| 3 | 8 | 5 | 3 | 7 |
| 7 | 5 | | 7 | 3 |

.

Wieder das Sudokukriterium liefert abschließend

| ⋆ | 8 | 5 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | 7 | 8 | 5 |
| 5 | 7 | 3 | 5 | 8 |
| 3 | 8 | 5 | 3 | 7 |
| 7 | 5 | 8 | 7 | 3 |

(8 Punkte)

(b) Das neutrale Element ist wie oben ausgeführt das Element 3. (1 Punkt)

(c) Wie wir sehen sind alle Elemente selbstinvers und haben damit alle nicht neutralen Elemente 5, 8, 7 die gleiche und damit maximale Ordnung 2. (1 Punkt)

(d) Neben den beiden trivialen Untergruppen können auf Grund des Satzes von Lagrange nur Untergruppen der Kardinalität 2 existieren, das sind gerade die zyklisch von den einzelnen Elementen erzeugten Untergruppen $\langle 5 \rangle$, $\langle 8 \rangle$, $\langle 7 \rangle$. (2 Punkte)

(e) Da 3 neutral ist, besteht $G / \langle 3 \rangle$ gerade aus den einelementigen Äquivalenzklassen $[3]$, $[5]$, $[8]$, $[7]$ und ist isomorph zu $G$. (1 Punkt)

**Aufgabe 4.** $3 + 4 + 3 + 5 = 15$ Punkte

Gegeben sei der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation. Zeigen Sie:

(a) Es existiert genau ein Ringendomorphismus von Ringen mit Eins auf $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(b) Es existiert genau ein Ringautomorphismus auf $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(c) Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ideal in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(d) Neben den Idealen aus Teilaufgabe (c) gibt es in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ keine weiteren.

**Hinweis:** Nutzen Sie die übliche Totalordnung auf $\mathbb{Z}$ für einen Widerspruchsbeweis.

---

**Lösung.**

Skizze zur Selbstkontrolle:

(a) Die Identität bildet die 1 auf 1 ab und ist natürlich mit der Addition und Multiplikation veräglich also ein solcher Endomorphismus. Dass kein weiterer existieren kann folgt direkt daraus, dass solch ein Endomorphismus $f(1) = 1$ erfüllen muss, und damit, wegen der Verträglichkeit mit der additiven Verknüpfung auch

$$f(z) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{z\text{-mal}}) = \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{z\text{-mal}} = zf(1) = z1 = z$$

gilt, womit nur die Identität bleibt. (3 Punkte)

(b) Wir sehen, dass der obige Endomorphismus von Ringen mit Eins auch ein Automorphismus (von Ringen mit Eins) ist und damit ein Automorphismus. Es existiert kein weiterer, denn

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$$

zeigt, dass die Eins nur auf idempotente Elemente abgebildet werden kann. Die einzigen idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}$ sind aber $0$ und $1$ und auf Grund der Bijektivitätsforderung muss gelten, dass $f(1) \neq f(0) = 0$, was durch die Gruppenhomomorphismeneigenschaft festgelegt wird. (4 Punkte)

(c) Die Mengen $m\mathbb{Z}$ sind nichtleer und für $mz_1$ und $mz_2$ aus $m\mathbb{Z}$ ist

$$mz_1 - mz_2 = m(z_1 - z_2) \in m\mathbb{Z}$$

und nach dem Untergruppenkriterium ist $m\mathbb{Z}$ also eine additive Untergruppe. Weiterhin ist für $mz_1 \in m\mathbb{Z}$ und $z_2 \in \mathbb{Z}$ auch

$$mz_1 \cdot z_2 = m \cdot (z_1 z_2) \in m\mathbb{Z}$$

und wegen der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ auch die Idealeigenschaft und damit die multiplikative Abgeschlossenheit der Menge gezeigt, was hinreichend für die multiplikative Unterhalbgruppeneigenschaft und damit für die Idealeigenschaft ist. (3 Punkte)

(d) Es sei $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Ideal. Ist $I = \{0\}$, dann ist $I = 0\mathbb{Z}$. Anderenfalls setzen wir $m$ als die kleinste positive Zahl in $I$. Wegen der Idealeigenschaft muss dann $m\mathbb{Z} \subseteq I$ gelten.

Angenommen es gäbe eine $z \in I \setminus m\mathbb{Z}$, dann liegt wegen der Untergruppeneigenschaft auch $-z \in I \setminus m\mathbb{Z}$, wir dürfen also annehmen, dass $z$ positiv ist. Dann gibt es eine Darstellung

$$z = m \cdot n + r$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 < r < m$ und wieder wegen der Untergruppeneigenschaft ist

$$r = z - m \cdot n \in I$$

im Widerspruch dazu, dass $m$ das kleinste positive Element aus $I$ ist. (5 Punkte)

**Aufgabe 5.** 14 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, \oplus, \odot)$ ein $(K, +, \cdot)$-Vektorraum sowie $v \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $(K \odot \{v\}, \oplus, \bullet)$ mit

$$\bullet(\alpha \odot v, \beta \odot v) \coloneqq (\alpha \cdot \beta) \odot v$$

einen zu $(K, +, \cdot)$ isomorphen Körper bildet.

---

**Lösung.**

Skizze für die Selbstkontrolle:

Die Schlüsselkomponente des Beweises ist, dass wir uns erst einmal davon überzeugen müssen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Das folgt direkt aus der Beobachtung, dass

$$\alpha \odot v = \beta \odot v \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \odot v \ominus \beta \odot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha - \beta) \odot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta,$$

was auch direkt zeigt, dass die Abbildung $f \colon K \ni \alpha \mapsto \alpha \odot v \in K \odot \{v\}$ eine Bijektion ist.

Für die Addition gilt nun wegen der gemischten Distributivgesetze, dass

$$f(\alpha) \oplus f(\beta) = \alpha \odot v \oplus \beta \odot v = (\alpha + \beta) \odot v = f(\alpha + \beta),$$

während für die Multiplikation

$$f(\alpha) \bullet f(\beta) = \alpha \odot v \bullet \beta \odot v = (\alpha \cdot \beta) \odot v = f(\alpha \cdot \beta)$$

per Definition gilt.

Bezüglich $\oplus$ ist natürlich $0_V = 0_K \odot v = f(0_K)$ neutral, während bezüglich $\bullet$ das Element $v = 1_K \odot v = f(1_K)$ neutral ist.

Es liegt also eine Bijektion zwischen den beiden Mengen vor, die mit den darauf definierten Strukturen verträglich ist. Damit überträgt sich die Assoziativität und Kommutativität der Körperverknüpfungen direkt auf $\oplus$ und $\bullet$ und es gilt

$$\ominus(\alpha \odot v) = f(-\alpha) \quad \text{sowie} \quad (\alpha \odot v)^{-1} = f(\alpha^{-1}) \quad \text{für } \alpha \neq 0,$$

was den Nachweis der Körperisomorphie abschließt und insbesondere die Körpereigenschaft von $(K, +, \cdot)$ auf $(K \odot \{v\}, \oplus, \bullet)$ überträgt. (14 Punkte)

**Aufgabe 6.** 4 + 4 + 4 + 2 + 1 = 15 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien die Unterräume

$$U := \{A \in K^{n\times n} \mid a_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![2,n]\!]\}$$
$$W := \{A \in K^{n\times n} \mid \text{Die Spalten von } A \text{ summieren sich zu } 0 \in \mathbb{R}^n.\}$$

des Raums $V := \mathbb{K}^{n\times n}$ der Matrizen gegeben.

(a) Zeigen Sie für $U$ oder $W$ die Unterraumeigenschaft.

(b) Zeigen Sie, dass $U \oplus W = V$ und geben Sie für beliebige Matrizen $A \in V$ die Zerlegung in Anteile aus $U$ und $W$ an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U$ und eine Basis von $W$.

(d) Bestimmen Sie die Dimension und Kodimension von $U$ und von $W$.

(e) Bestimmen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion $W \subseteq U$ gilt.

---

**Lösung.**

Skizze für die Selbstkontrolle:

(a) Beide Mengen sind nichtleer, denn die konstante Nullmatrix ist in beiden Mengen enthalten.

Für $A, B$ aus $U$ ist die $j$-te Spalte von $A+B$ gerade die Summe der $j$-ten Spalten aus $A$ und $B$ und für alle $j \geqslant 2$ auch $(A+B)_{\bullet j} = 0$. Ebenso ist $(\alpha A)_{\bullet j} = \alpha(A)_{\bullet j} = 0$. Damit ist $U$ nach dem Unterraumkriterium ein Unterraum.

Für $A, B$ aus $W$ ist ebenfalls die $j$-te Spalte von $A+B$ gerade die Summe der $j$-ten Spalten aus $A$ und $B$ und somit gilt

$$\sum_{j=1}^{n} (A+B)_{\bullet j} = \sum_{j=1}^{n} a_{\bullet j} + b_{\bullet j} = \sum_{j=1}^{n} a_{\bullet j} + \sum_{j=1}^{n} b_{\bullet j} = 0.$$

Ebenso gilt für die Spalten von $\alpha A$:

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha A)_{\bullet j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha(a_{\bullet j}) = \alpha \sum_{j=1}^{n} (a_{\bullet j}) = \alpha 0 = 0.$$

Damit ist $W$ nach dem Unterraumkriterium ein Unterraum. (4 Punkte)

(b) Liegt $A \in U \cap W$, dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\bullet j} = a_{\bullet 1} = 0$$

und damit $A = 0$, also der Schnitt beider Unterräume trivial.

Die Zerlegung von $A \in K^{n\times n}$ ist gerade

$$A = \underbrace{A - \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \sum_{j=1}^{n} a_{\bullet j} & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \sum_{j=1}^{n} a_{\bullet j} & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{\in U}.$$

Dass die jeweiligen Anteile in den jeweiligen Unterräumen liegen ist direkt abzulesen. Dass diese Zerlegung auch eindeutig ist liegt gerade daran, dass der Schnitt der Unterräume trivial ist. (4 Punkte)

(c) Als Basis von $U$ bietet sich

$$(E_{i1})_{i\in[\![1,n]\!]}$$

an. Diese Familie ist als Teilfamilie der Standardbasis linear unabhängig und erzeugt jede Matrix $A$ aus $U$ via

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}E_{i1}.$$

Als Basis von $W$ bietet sich

$$(E_{ij} - E_{in})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n-1]\!]}$$

an. Dass diese Familie aus Mitgliedern aus $W$ besteht erkennen wir direkt daran, dass die nicht-Nulleinträge der Basismatrizen gerade alle in der gleichen Zeile liegen und sich zu 0 summieren. Dass für $A \in W$ die Darstellung

$$A = \sum_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n-1]\!]} a_{ij}(E_{ij} - E_{in})$$

eindeutig ist sieht man gerade daran, dass die Basismatrizen in den ersten $n-1$ Spalten eintragsweise unabhängig arbeiten und die letzte Spalte für alle $A \in W$ durch die definierende Unterraumeigenschaft festgelegt ist. (4 Punkte)

(d) Die Dimensionen lassen sich jeweils direkt an den Basisfamilien ablesen und wir erhalten die jeweilige Kodimension direkt über die Dimension des jeweils anderen Raumes, also

$$\operatorname{codim}(W) = \dim(U) = n \quad \text{und} \dim(W) = \operatorname{codim}(U) = n(n-1) \quad .$$

(2 Punkte)

(e) Die Inklusion kann nur gelten, wenn $W$ der Nullraum ist, was genau dann der Fall ist, wenn $n = 1$ ist, was wir an der Dimensionsformel ablesen können, oder an der Eigenschaft, dass wenn alle Spalten sich zu 0 aufsummieren, aber nur eine Spalte existiert, dann bleibt nur die Nullmatrix über. (1 Punkt)

**Aufgabe 7.** 10 Punkte

Es sei $X$ eine einelementige Menge. Bestimmen Sie eine Rangfaktorisierung und den Rang von

$$\begin{pmatrix} X & \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ X & X & \emptyset & X & \emptyset \\ X & X & X & X & X \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)^{4\times 5}.$$

---

**Lösung.**

Wir haben

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ X & X & \emptyset & X & \emptyset \\ X & X & X & X & X \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ X & \emptyset & X & \emptyset \\ X & \emptyset & \emptyset & X \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ X & \emptyset & X & \emptyset \\ X & \emptyset & \emptyset & X \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ X & X & \emptyset & X & \emptyset \\ X & X & X & X & X \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ X & \emptyset & X & \emptyset \\ X & \emptyset & \emptyset & X \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & X \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & X \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset & X \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ X & X & X & \emptyset \\ X & X & \emptyset & X \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & X \\ \emptyset & \emptyset & X & \emptyset \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & X \\ \emptyset & \emptyset & X & \emptyset \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & X & \emptyset & X \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset & \emptyset \\ X & X & \emptyset & X \\ X & X & X & \emptyset \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & X & \emptyset & X \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & X & \emptyset \\ X & X & \emptyset \\ X & X & X \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X & \emptyset & X & X & \emptyset \\ \emptyset & X & X & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & X & \emptyset & X \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

und damit den Rang 3. (10 Punkte)