R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 14

Ausgabedatum: 27. Januar 2025
Abgabedatum: 3. Februar 2025

Hausaufgabe 14.1 (Eigenschaften von $\mathcal{F}_M(x)$, $\mathcal{K}_M(x)$ und deren Zusammenhang) 1 + 1 + 1 + 3 = 6 Punkte

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig und $x \in M$. Zeigen Sie Satz 17.7 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen.

(a) $\mathcal{F}_M(x)$ und $\mathcal{K}_M(x)$ sind spitze Kegel.

(b) $\mathcal{F}_M(x) \subseteq \mathcal{K}_M(x)$.

(c) $M \subseteq x + \mathcal{K}_M(x)$.

(d) Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann ist $\mathcal{K}_C(x)$ für jedes $x \in c$ ein spitzer konvexer Kegel, und es gilt $\mathcal{F}_C(x) = \mathcal{K}_C(x)$.

Hausaufgabe 14.2 (Eigenschaften des Normalenkegels) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $x \in M$. Beweisen Sie Lemma 17.11 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen:

(a) Der Normalenkegel $\mathcal{N}_M(x)$ ist ein konvexer abgeschlossener Kegel.

(b) Es gilt
$$\mathcal{N}_M(x) = \mathcal{K}_M(x)^\circ \coloneqq \{s \in \mathbb{R}^n \mid s^\top d \leqslant 0 \text{ für alle } d \in \mathcal{K}_M(x)\}.$$

Hausaufgabe 14.3 (Standortoptimierung) 1 + 6 + 2 + 2 = 11 Punkte

Der Standort einer Rettungswache soll geplant werden. Sie soll m Ortschaften versorgen. Maß für die Güte eines Standorts ist die gewichtete Summe der Abstände des Standorts zu den Ortschaften (je kleiner, desto besser). Dabei sind die Gewichte der Ortschaften proportional zu ihrer jeweiligen Bevölkerungszahl.

Das mathematische Modell hat die folgende Form: Es seien $a_1, \dots, a_m$ paarweise verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$, welche die Lage der Ortschaften darstellen, positive Gewichte $w_1, \dots, w_m$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \sum_{i=1}^m w_i \, \|x - a_i\|_2$ gegeben. Jeder Minimierer von f ist ein optimaler Standort.

(a) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Aufgabe im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar ist.

(b) Geben Sie hinreichende und notwendige Optimalitätsbedingungen für Minimierer von f an und zeigen Sie, dass ein Minimierer existiert.

(c) Der Standort darf nun ausschließlich im Kreisscheibensektor $K \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, \ \|x\|_2 \leqslant 1\}$ liegen. Passen Sie die Optimalitätsbedingungen aus Teilaufgabe (b) an.

   Hinweis: Sie dürfen den auftretenden Normalenkegel ohne technischen Nachweis angeben.

(d) Die Optimierungsaufgaben in Teilaufgaben (b) und (c) lassen sich mit einer mechanischen Konstruktion lösen. Geben Sie an, wie diese aussehen könnte.

   Hinweis: Interpretieren Sie die Bedingungen aus Teilaufgaben (b) und (c) als Kräftegleichgewicht.

Zusatzaufgabe 14.4 (Eindeutigkeit der Richtung des steilsten Abstiegs) 3 Bonuspunkte

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie Lemma 19.1 aus dem Skript, also die folgende Aussage:

Falls ein $d \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $f'(x_0; d) < 0$ ist, dann ist die Lösung von

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f'(x_0; d) \quad \text{über } d \in \mathbb{R}^n \\ \text{unter} \quad & \|d\| \leqslant 1 \end{aligned} \qquad \text{(Gleichung (19.3))}$$

eindeutig.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.