R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 12

Ausgabedatum: 13. Januar 2025
Abgabedatum: 20. Januar 2025

Hausaufgabe 12.1 (Abg., konvexe Mengen sind Schnitt abg. Halbräume) 4 Punkte

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie, dass

$$C = \bigcap \{H \subseteq \mathbb{R}^n \mid H \text{ ist abgeschlossener Halbraum mit } C \subseteq H\}.$$

Hausaufgabe 12.2 (Endlichdimensionale Version des Satzes von Krein-Milman) 2 + 1 + 2 + 7 = 12 Punkte

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Punkt $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ existiert eine **eigentliche Stützhyperebene**, also eine Hyperebene $H(a, \beta)$, so dass

$$a^\intercal \widehat{x} = \beta \ge a^\intercal x \quad \text{für alle } x \in C \qquad \text{und} \qquad \beta > a^\intercal x \quad \text{für mindestens ein } x \in C.$$

(b) Es sei $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine eigentliche Stützhyperebene zu C an $\widehat{x}$. Dann ist

$$\dim(H(a, \beta) \cap C) < \dim(C).$$

(c) Es sei $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine Stützhyperebene zu C an $\widehat{x}$. Dann sind alle Extremalpunkte der nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Menge $C \cap H(a, \beta)$ auch Extremalpunkte von C.

und beweisen Sie damit eine endlichdimensionale Version des Satzes von Kreil-Milman:

(d) Jede nichtleere, kompakte, konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte.

Hinweis: In Aussage (d) können Sie induktiv über die Dimension der Menge C argumentieren.

Beachte: Aus Aussage (d) folgt mit dem Satz 15.13 von Carathéodory sofort, dass jeder Punkt in C als die Konvexkombination von höchstens $\dim(C) + 1$ der Extremalpunkte von C dargestellt werden kann.

Hausaufgabe 12.3 2 Punkte

Beweisen Sie Satz 16.4 aus dem Skript, also die folgende Aussage:

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial f(x_0)$ abgeschlossen und konvex.

Zusatzaufgabe 12.4 (Konvexe Mengen mit konvexem Komplement) 4 Bonuspunkte

Stellen Sie eine Vermutung auf, welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ konvex sind und konvexes Komplement haben und beweisen Sie Ihre Aussage.

Zusatzaufgabe 12.5 (Monotonie des Subdifferentials) 2 + 2 + 1 = 5 Bonuspunkte

Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion und $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^n$

(a) Zeigen Sie, dass das Subdifferential ein (mengenwertiger) monotoner Operator ist, also dass

$$(s_1 - s_2)^\intercal (x_1 - x_2) \geqslant 0 \tag{0.1}$$

für alle $s_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$.

(b) Zeigen Sie, dass Aussage (a) für strikt konvexes f und $x_1 \neq x_2$ mit echter Ungleichheit in (0.1) gilt.

(c) Zeigen Sie für strikt konvexes f und $x_1, x_2 \in \operatorname{rel\,int}(\operatorname{dom} f)$ die Beziehung

$$\partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \neq \emptyset \iff x_1 = x_2.$$

Zusatzaufgabe 12.6 (Das Subdifferential von Normen) 3 + 3 = 6 Bonuspunkte

(a) Es sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm und $\|\cdot\|^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die dazugehörige duale Norm

$$\|s\|^* \coloneqq \max\left\{ \left|s^\intercal x\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| \leqslant 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\partial\|x_0\| = \left\{s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|s\|^* \leq 1 \text{ und } s^\intercal x_0 = \|x_0\|\right\}.$$

(b) Nutzen Sie Aussage (a) um Beispiel 16.5 zu verifizieren, also um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(i) Es gilt $s \in \partial\|x\|_1$ genau dann, wenn

$$s_i \in \begin{cases} \{-1\} & \text{falls } x_i < 0, \\ [-1, 1] & \text{falls } x_i = 0, \\ \{1\} & \text{falls } x_i > 0 \end{cases}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$.

(ii)

$$\partial\|x\|_2 = \begin{cases} \left\{\frac{x}{\|x\|_2}\right\}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_2 \leqslant 1\}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(iii) Für $x \neq 0$ gilt

$$\partial f(x) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{r} \|s\|_1 = 1,\; s_i \geqslant 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } x_i = \|x\|_\infty, \\ s_i \leqslant 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } -x_i = \|x\|_\infty, \\ \text{und } s_i = 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } |x_i| < \|x\|_\infty \end{array} \right\}$$

sowie

$$\partial f(0) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leqslant 1\}.$$

und

$$\partial\|0\|_\infty = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leqslant 1\}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die duale Norm der p-Norm für $p \in [1, \infty]$ die q-Norm für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.