R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 12 (Lösung)

Ausgabedatum: 13. Januar 2025
Abgabedatum: 20. Januar 2025

Hausaufgabe 12.1 (Abg., konvexe Mengen sind Schnitt abg. Halbräume) 4 Punkte

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie, dass

$$C = \bigcap \{H \subseteq \mathbb{R}^n \mid H \text{ ist abgeschlossener Halbraum mit } C \subseteq H\}.$$

Lösung.

Wir setzen

$$D \coloneqq \bigcap \{H \subseteq \mathbb{R}^n \mid H \text{ ist abgeschlossener Halbraum mit } C \subseteq H\}. \tag{$*$}$$

Für leeres C schneidet man in D alle Halbräume und erhält wieder die leere Menge und für $C = \mathbb{R}^n$ schneiden wir eine leere Familie von Mengen und erhalten wieder den ganzen Raum. Für alle anderen mengen ist $C \subseteq D$ offensichtlich und es bleibt also nur $D \subseteq C$ zu zeigen, was wir per Widerspruch beweisen. (1 Punkt)

Wir nehmen also an, es gäbe ein $\widehat{x} \in D \setminus C$. Da $\{\widehat{x}\}$ und C nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen sind und $\{\widehat{x}\}$ kompakt ist, folgt aus Satz 15.35 die Existenz einer Hyperebene $H(a, \beta)$ mit

$$a^\intercal \widehat{x} < \beta < a^\intercal x \quad \text{für alle } x \in C. \tag{$**$}$$

Der abgeschlossene Halbraum $H^+(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\intercal x \geq \beta\}$ kommt also beim Schnitt der Halbräume in der Definition ($*$) der Menge D vor. Entsprechend ist $\widehat{x} \in D \subseteq H^+(a, \beta)$ aber nach ($**$) ist $\widehat{x} \notin H^+(a, \beta)$, was ein Widerspruch ist. (3 Punkte)

Hausaufgabe 12.2 (Endlichdimensionale Version des Satzes von Krein-Milman) 2 + 1 + 2 + 7 = 12 Punkte

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Punkt $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ existiert eine **eigentliche Stützhyperebene**, also eine Hyperebene $H(a, \beta)$, so dass

$$a^\intercal \widehat{x} = \beta \geq a^\intercal x \quad \text{für alle } x \in C \qquad \text{und} \qquad \beta > a^\intercal x \quad \text{für mindestens ein } x \in C.$$

(b) Es sei $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine eigentliche Stützhyperebene zu C an $\widehat{x}$. Dann ist

$$\dim(H(a, \beta) \cap C) < \dim(C).$$

(c) Es sei $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine Stützhyperebene zu C an $\widehat{x}$. Dann sind alle Extremalpunkte der nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Menge $C \cap H(a, \beta)$ auch Extremalpunkte von C.

und beweisen Sie damit eine endlichdimensionale Version des Satzes von Kreil-Milman:

(d) Jede nichtleere, kompakte, konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte.

Hinweis: In Aussage (d) können Sie induktiv über die Dimension der Menge C argumentieren.

Beachte: Aus Aussage (d) folgt mit dem Satz 15.13 von Carathéodory sofort, dass jeder Punkt in C als die Konvexkombination von höchstens $\dim(C) + 1$ der Extremalpunkte von C dargestellt werden kann.

Lösung.

(a) Es sei also $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ gegeben. Der Punkt $\widehat{x}$ liegt nicht im (nach Satz 15.16 nichtleeren und nach Satz 15.20 konvexen) $\operatorname{rel}\operatorname{int}(C)$ und es ist $\operatorname{rel}\operatorname{int}(\{\widehat{x}\}) = \widehat{x}$. Nach Satz 15.32 existiert daher eine Hyperebene $H(a, \beta)$, die $\widehat{x}$ und C eigentlich trennt, also

$$a^\intercal \widehat{x} \leqslant \beta \leqslant a^\intercal x \quad \text{für alle } x \in C, \qquad \text{und} \qquad \beta > a^\intercal x \quad \text{für mindestens ein } x \in C,$$

weshalb das auch für die Hyperebene $H(a, a^\intercal \widehat{x})$ gilt. (2 Punkte)

(b) Es seien also $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine Stützhyperebene wie in der Behauptung gegeben.

Ist $\dim C = 0$ (also C eine Menge aus einem einzelnen Punkt), dann ist $\operatorname{rel} \partial(C)$ leer, wir können also von $\dim C > 0$ ausgehen. Dann ist $a^\intercal x = \beta$ für alle $x \in \operatorname{aff}(C \cap H(a, \beta))$ und damit

$\operatorname{aff}(C \cap H(a,\beta)) \subsetneq \operatorname{aff}(C)$, also $\dim \operatorname{aff}(C \cap H(a,\beta)) < \dim \operatorname{aff}(C)$. Denn wären die Dimensionen gleich, aber die Teilmengeneigenschaft echt, dann gäbe es einen Punkt aus $\operatorname{aff}(C) - \widehat{x}$, den wir linear unabhängig zu $\operatorname{aff}(C \cap H(a,\beta)) - \widehat{x}$ hinzufügen könnten um einen $\dim(C)+1$-dimensionalen affinen Unterraum von $\operatorname{aff}(C)$ zu erhalten. (1 Punkt)

(c) Es seien also $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a,\beta)$ eine Stützhyperebene wie in der Behauptung gegeben und x ein Extremalpunkt von $C \cap H(a,\beta)$ mit $x = \alpha y + (1-\alpha) z$ für $\alpha \in (0,1)$ und $y, z \in C$. Dann ist

$$\beta = a^\top x = \alpha \underbrace{a^\top y}_{\leq \beta} + (1-\alpha) \underbrace{a^\top z}_{\leq \beta}$$

und somit wegen $\alpha \in (0,1)$ auch $a^\top y = a^\top z = a^\top x = \beta$, also $y, z \in C \cap H(a,\beta)$. Aus der Extremalpunkteigenschaft von x in $C \cap H(a,\beta)$ folgt $x = y = z$ und damit die sofort die Behauptung. (2 Punkte)

(d) Da $C = \operatorname{conv}(C)$ ist, ist die konvexe Hülle der Extremalpunkte von C offensichtlich auch eine Teilmenge von C. (1 Punkt)

Wir zeigen die verbleibende Inklusion induktiv über die Dimension der Menge C (also die Dimension des Unterraums, der zur affinen Hülle der Menge C gehört).

Ist $\dim C = 0$ (also C einelementig), dann ist die Aussage trivial, denn die gesamte Menge C besteht dann aus ihrem einzigen Extrempunkt.

Für $\dim C = k+1$, $k \in \mathbb{N}$ sei ein beliebiges $x \in C$ gegeben. Für jedes beliebige $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ können wir die Gerade $\{x + th \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ durch den Punkt x betrachten und erhalten auf Grund von der Beschränktheit der Menge C, dass nicht die gesamte Gerade in C enthalten sein kann. Genauer ist die Menge der $t \in \mathbb{R}$, so dass $x + t\,h \in C$ ist, beschränkt und auf Grund der Abgeschlossenheit von C auch abgeschlossen – also kompakt. Daher existieren

$$\begin{aligned} t_- &\coloneqq \min\{t \in \mathbb{R} \mid x + t\,h \in C\} \quad \text{und} \quad x_- = x + t_- h \in C, \\ t_+ &\coloneqq \max\{t \in \mathbb{R} \mid x + t\,h \in C\} \quad \text{und} \quad x_+ = x + t_+ h \in C. \end{aligned}$$

(2 Punkte)

Sowohl x_+ als auch x_- sind in $\operatorname{rel} \partial(C)$ enthalten, wie wir beispielhaft an x^+ zeigen: Angenommen x_+ wäre nicht in $\operatorname{rel} \partial(C)$, dann wäre x_+ in $\operatorname{rel} \operatorname{int}(C)$ und somit gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass $x_+ + \varepsilon h \in C$, im Widerspruch zur Maximumseigenschaft von t_+. (1 Punkt)

Nach Aussage (a) existieren zwei Stützhyperebenen $H(a_\pm, \beta_\pm)$ zu C an $x_\pm$, so dass nach Aussage (b) die Mengen $H(a_\pm, \beta_\pm) \cap C$ echt kleinere Dimension als C und damit als k haben, so dass nach Induktionsvoraussetzung die Punkte $x_\pm$ eine Konvexkombination von Extremalpunkten der Mengen $H(a_\pm, \beta_\pm) \cap C$ sind, und diese Extremalpunkte sind nach Aussage (c) auch Extremalpunkte von C. Da x eine Konvexkombination von $x_\pm$ ist, hat auch x eine Darstellung als Konvexkombination der Extremalpunkte, aus denen $x_\pm$ zusammengesetzt werden können. (3 Punkte).

Hausaufgabe 12.3 2 Punkte

Beweisen Sie Satz 16.4 aus dem Skript, also die folgende Aussage:

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial f(x_0)$ abgeschlossen und konvex.

Lösung.

Es sei $\left(s^{(n)}\right)$ eine Folge in $\partial f(x_0)$. Nach (16.1) gilt also

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \left(s^{(n)}\right)^\mathsf{T}(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Konvergiert $s^{(n)} \to s \in \mathbb{R}^n$, dann folgt durch Grenzübergang

$$f(x) \geqslant \lim_{n\to\infty} \left[f(x_0) + \left(s^{(n)}\right)^\mathsf{T}(x - x_0)\right] = f(x_0) + s^\mathsf{T}(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Das heißt, $\partial f(x_0)$ ist abgeschlossen. (1 Punkt)

Es seien nun $r, s \in \partial f(x_0)$ und $\alpha \in [0, 1]$. Die gewichtete Addition der Subgradientenungleichungen

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant f(x_0) + r^\mathsf{T}(x - x_0) \\ f(x) &\geqslant f(x_0) + s^\mathsf{T}(x - x_0) \end{aligned}$$

ergibt

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \left(\alpha\, r + (1 - \alpha)\, s\right)^\mathsf{T}(x - x_0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Also gehört auch $\alpha\, r + (1 - \alpha)\, s$ zu $\partial f(x_0)$. Das heißt, $\partial f(x_0)$ ist konvex. (1 Punkt)

Zusatzaufgabe 12.4 (Konvexe Mengen mit konvexem Komplement) 4 Bonuspunkte

Stellen Sie eine Vermutung auf, welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ konvex sind und konvexes Komplement haben und beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösung.

Die konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit konvexem Komplement sind entweder leer, der ganze Raum oder sind die Vereinigung von offenen Halbräumen und solchen Teilen der definierenden Hyperebene, die konvex sind und deren Komplement in der Relativtopologie der Hyperebene konvex ist. Also gilt in der Potenzmenge von $\mathbb{R}^n$, dass

$$\{C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C \text{ konvex und } \mathbb{R}^n \setminus C \text{ konvex}\} = D.$$

mit

$$D = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^n\} \cup \{\operatorname{int}(H^-(a,\beta)) \cup R \mid a \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ und } R \subseteq H(a,\beta) \text{ s.d. } R,\ H(a,\beta) \setminus R \text{ konvex}\}\,.$$

(1 Punkt)

Dass jede der angegebenen Mengen konvex ist und konvexes Komplement hat ist für das Mengenpaar der leeren Menge und des ganzen Raumes trivial. Sei nun

$$C = \operatorname{int}(H^-(a,\beta)) \cup R$$

für einen offenen Halbraum $\operatorname{int}(H^-(a,\beta))$ und eine Menge $R \subseteq H(a,\beta)$, die konvex ist und konvexes Relativkomplement in $H(a,\beta)$ hat. Dann ist C offensichtlich konvex und für das Komplement gilt $\mathbb{R}^n \setminus C = \operatorname{int}(H^+(a,\beta)) \cup (H(a,\beta) \setminus R)$, was die gleiche Struktur hat und damit auch konvex ist. (1 Punkt)

Sei nun eine Menge C gegeben, die konvex ist und konvexes Komplement hat. O. B. d. A. ist C weder leer noch der ganze Raum. Damit sind C und $\mathbb{R}^n \setminus C$ nichtleer, konvex und offensichtlich disjunkt und es existiert nach Satz 15.32 eine eigentlich trennende Hyperebene $H(a,\beta)$, so dass

$$a^\top x \leqslant \beta \leqslant a^\top y \quad \text{für alle } x \in C \text{ und alle } y \in \mathbb{R}^n \setminus C$$

und

$$a^\top \overline{x} < a^\top \overline{y} \quad \text{für ein } \overline{x} \in C \text{ und ein } \overline{y} \in \mathbb{R}^n \setminus C.$$

(1 Punkt)

Insbesondere sind also $\operatorname{int}(H^-(a,\beta)) \subseteq C \subseteq H^-(a,\beta)$ und $\operatorname{int}(H^+(a,\beta)) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus C \subseteq H^+(a,\beta)$ und wir definieren $R \coloneqq C \setminus \operatorname{int}(H^-(a,\beta)) = C \cap H(a,\beta)$. Dann ist nach Definition

$$C = \operatorname{int}(H^-(a,\beta)) \cup R$$

und R ist konvex als Schnitt konvexer Mengen. Ebenso ist

$$H(a,\beta) \setminus R = (\mathbb{R}^n \setminus C) \setminus \operatorname{int}(H^+(a,\beta)) = (\mathbb{R}^n \setminus C) \cap H(a,\beta)$$

als Schnitt konvexer Mengen ebenfalls konvex. (1 Punkt)

Zusatzaufgabe 12.5 (Monotonie des Subdifferentials) 2 + 2 + 1 = 5 Bonuspunkte

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion und $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^n$

(a) Zeigen Sie, dass das Subdifferential ein (mengenwertiger) monotoner Operator ist, also dass

$$(s_1 - s_2)^\top (x_1 - x_2) \geqslant 0 \tag{0.1}$$

für alle $s_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$.

(b) Zeigen Sie, dass Aussage (a) für strikt konvexes f und $x_1 \neq x_2$ mit echter Ungleichheit in (0.1) gilt.

(c) Zeigen Sie für strikt konvexes f und $x_1, x_2 \in \operatorname{rel\,int}(\operatorname{dom} f)$ die Beziehung

$$\partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \neq \emptyset \iff x_1 = x_2.$$

Lösung.

(a) Nach Satz 16.8 kann das Subdifferential nur für Punkte in $\operatorname{dom} f$ nichtleer sein, wir können also o. B. d. A. $x_i \in \operatorname{dom} f$, $i = 1, 2$ annehmen. Für $s_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &\geq s_1^\top (x_2 - x_1) \\ f(x_1) - f(x_2) &\geq s_2^\top (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Addieren wir beide Zeilen, dann erhalten wir

$$0 \geq (s_2 - s_1)^\top (x_1 - x_2)$$

und damit die Behauptung. (2 Punkte)

(b) Die Aussage folgt sofort mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Aussage (a), wenn wir zeigen können, dass für eine konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, zwei Punkte $x \neq x_0$ und $s \in \partial f(x_0)$ die striktere Beziehung

$$f(x) > s^\top (x - x_0) + f(x_0)$$

gilt. Angenommen es wäre $x_0 \in \operatorname{dom} f$ und

$$f(x) = s^\top (x - x_0) + f(x_0)$$

für ein $x \neq x_0$, dann muss $x \in \operatorname{dom} f$ sein. Damit liegen alle Punkte auf der Verbindungsgerade von x und x_0 in $\operatorname{dom} f$. Für $\alpha \in (0, 1)$ ist dann also

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha) x_0) &< \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(x_0) \\ &= \alpha (s^\top (x - x_0) + f(x_0)) + (1 - \alpha) f(x_0) \\ &= \alpha s^\top (x - x_0) + f(x_0) \\ &= (1 - \alpha) s^\top (x_0 - x_0) + \alpha s^\top (x - x_0) + f(x_0) \\ &= s^\top ((\alpha x + (1 - \alpha) x_0) - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, dass $s \in \partial f(x_0)$. (2 Punkte)

(c) Für $x_1 \neq x_2$ und $s \in \partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \neq \emptyset$ folgt aus Aussage (b) sofort ein Widerspruch, was die Hinrichtung zeigt.

Die Rückrichtung gilt offensichtlich, da wegen $x_1 = x_2 \in \operatorname{rel\,int}(\operatorname{dom} f)$ und Satz 16.8 das Subdifferential nicht leer ist. (1 Punkt)

Zusatzaufgabe 12.6 (Das Subdifferential von Normen) 3 + 3 = 6 Bonuspunkte

(a) Es sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm und $\|\cdot\|^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die dazugehörige duale Norm

$$\|s\|^* \coloneqq \max\left\{\left|s^\top x\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| \leqslant 1\right\}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\partial\|x_0\| = \left\{s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|s\|^* \leq 1 \text{ und } s^\top x_0 = \|x_0\|\right\}.$$

(b) Nutzen Sie Aussage (a) um Beispiel 16.5 zu verifizieren, also um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(i) Es gilt $s \in \partial\|x\|_1$ genau dann, wenn

$$s_i \in \begin{cases} \{-1\} & \text{falls } x_i < 0, \\ [-1, 1] & \text{falls } x_i = 0, \\ \{1\} & \text{falls } x_i > 0 \end{cases}$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

(ii)

$$\partial\|x\|_2 = \begin{cases} \left\{\frac{x}{\|x\|_2}\right\}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_2 \leqslant 1\}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(iii) Für $x \neq 0$ gilt

$$\partial f(x) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{r} \|s\|_1 = 1,\ s_i \geqslant 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } x_i = \|x\|_\infty, \\ s_i \leqslant 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } -x_i = \|x\|_\infty, \\ \text{und } s_i = 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } |x_i| < \|x\|_\infty \end{array} \right\}$$

sowie

$$\partial f(0) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leqslant 1\}.$$

und

$$\partial\|0\|_\infty = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leqslant 1\}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die duale Norm der p-Norm für $p \in [1, \infty]$ die q-Norm für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

Lösung.

(a) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir definieren

$$D(x_0) \coloneqq \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|s\|^* \le 1 \text{ und } s^\mathsf{T} x_0 = \|x_0\| \right\}.$$

Es sei nun $s \in D$, dann ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x_0\| + s^\mathsf{T}(x - x_0) = s^\mathsf{T} x \le \|x\| \, \|s\|^* \le \|x\|$$

und damit $s \in \partial\|x_0\|$. (1 Punkt)

Es sei nun $s \in \partial\|x_0\|$, d. h. es gilt

$$\|x\| \ge \|x_0\| + s^\mathsf{T}(x - x_0) \tag{0.2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Für $x = 2x_0$ erhalten wir

$$2\|x_0\| \ge \|x_0\| + s^\mathsf{T} x_0$$

und für $x = 0$ ergibt sich

$$0 \ge \|x_0\| - s^\mathsf{T} x_0$$

und damit

$$s^\mathsf{T} x_0 = \|x_0\|. \tag{0.3}$$

(1 Punkt)

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\|s\|_* \le 1$ ist. Dafür nutzen wir (0.3) für eine Ersetzung in (0.2) und erhalten, dass

$$\|x\| \ge s^\mathsf{T} x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und damit auch, dass

$$\|x\| \ge \left| s^\mathsf{T} x \right| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

sowie

$$1 \ge \left| s^\mathsf{T} \frac{x}{\|x\|} \right| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Es folgt also

$$1 \ge \max\left\{ \left| s^\mathsf{T} x \right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1 \right\} = \max\left\{ \left| s^\mathsf{T} x \right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \le 1 \right\} = \|s\|_*.$$

(1 Punkt)

(b) Die dualen Normen zu den p-Normen mit $p \in [0, \infty]$ sind genau die q-Normen zu den konjugierten Exponenten mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Damit erhalten wir:

(i)

$$\partial \|x\|_1 = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_\infty \leq 1 \text{ und } x^\mathsf{T} s = \|x\|_1\}.$$

Dass die s aus der Behauptung im Subdifferential liegen ist damit offensichtlich. Jedes Element des Subdifferentials muss wegen der Normbeschränkung $|s_i| \leq 1$ erfüllen. Für alle i mit $x_i = 0$ ist das auch die einzige Beschränkung. Für alle anderen gilt

$$\sum_{i, x_i \neq 0} s_i x_i = x^\mathsf{T} s = \|x\|_1 = \sum_{i, x_i \neq 0} |x_i|$$

und wenn $s_i \neq \operatorname{sgn} x_i$ für ein i, dann ist die Summe auf der linken Seite kleiner als die der rechten. (1 Punkt)

(ii)

$$\partial \|x\|_2 = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_2 \leq 1 \text{ und } x^\mathsf{T} s = \|x\|_2\}.$$

Dass die s aus der Behauptung im Subdifferential liegen ist damit offensichtlich. Im Fall $x = 0$ ist die Darstellung des Subdifferentials genau die Menge in der Behauptung. Im Fall $x \neq 0$ ist die 2-Norm differenzierbar und das Subdifferential daher einelementig ist, in diesem Fall ist die Gleichheit also ebenfalls klar. (1 Punkt)

(iii)

$$\partial \|x\|_\infty = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leq 1 \text{ und } x^\mathsf{T} s = \|x\|_\infty\}.$$

Dass die s aus der Behauptung im Subdifferential liegen ist damit offensichtlich, da

$$s^\mathsf{T} x = \sum_{i=1}^n s_i x_i = \sum_{i,\, |x_i| = \|x\|_\infty} \operatorname{sgn}(s_i) |s_i| \operatorname{sgn}(x_i) |x_i| = \sum_{i,\, |x_i| = \|x\|_\infty} |s_i| \|x\|_\infty = \|s\|_1 \|x\|_\infty = \|x\|_\infty \tag{0.4}$$

Im Fall $x = 0$ ist die Darstellung des Subdifferentials außerdem genau die Menge in der Behauptung. Im Fall $x \neq 0$ gilt für $s \in \partial \|x\|_\infty$ in der Darstellung des Subdifferentials die geforderte Normbeschränkung der Menge in der Behauptung und es gilt

$$s^\mathsf{T} x = \sum_{i=1}^n s_i x_i = \|x\|_\infty \tag{0.5}$$

und somit die Form der s_i aus der Behauptung, da für jedes andere s mit der Normbeschränkung die Summe kleiner als $\|x\|_\infty$ wäre. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.