R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 11

Ausgabedatum: 7. Januar 2025
Abgabedatum: 13. Januar 2025

Hausaufgabe 11.1 (Satz von Carathéodory) 6 Punkte

Beweisen Sie den Satz 15.13 von Carathéodory, also die folgende Aussage:

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge der Dimension k und $x \in \operatorname{conv}(M)$ eine Konvexkombination der Punkte $x_0, \ldots, x_m \in M$ mit $m \geqslant 0$. Dann ist x bereits eine Konvexkombination von höchstens $k + 1$ dieser Punkte.

Hinweis: Nutzen Sie, dass die Punkte $x_0, \ldots, x_m \in M$ im Falle von $m > k$ affin abhängig sind.

Hausaufgabe 11.2 (Affine Hülle und Minkowskisumme) 4 Punkte

Es seien M_1, M_2 Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, welche Teilmengenrelation die Mengen $\operatorname{aff}(M_1 + M_2)$ und $\operatorname{aff}(M_1) + \operatorname{aff}(M_2)$ erfüllen. Beweisen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 11.3 (Konvexität ist für Satz 15.21 notwendig.) 2 + 2 = 4 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer nichtkonvexen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ an, so dass:

(a) $\operatorname{int}(M) \neq \operatorname{int}(\overline{M})$
(b) $\partial M \neq \partial \overline{M}$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.