R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 11 (Lösung)

Ausgabedatum: 7. Januar 2025
Abgabedatum: 13. Januar 2025

Hausaufgabe 11.1 (Satz von Carathéodory) 6 Punkte

Beweisen Sie den Satz 15.13 von Carathéodory, also die folgende Aussage:

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge der Dimension k und $x \in \operatorname{conv}(M)$ eine Konvexkombination der Punkte $x_0, \ldots, x_m \in M$ mit $m \geqslant 0$. Dann ist x bereits eine Konvexkombination von höchstens $k + 1$ dieser Punkte.

Hinweis: Nutzen Sie, dass die Punkte $x_0, \ldots, x_m \in M$ im Falle von $m > k$ affin abhängig sind.

Lösung.

Es seien $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, m$ mit $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ die Faktoren der Konvexkombination-Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \, x_i \tag{$*$}$$

von x bzgl. der $x_i \in M$. O. B. d. A. sind alle der $\alpha_i > 0$. Wir zeigen jetzt konstruktiv Folgendes: Solange $m > k$ gilt, dann lässt sich die Darstellung ($*$) mit $m+1$ Summanden auf m Summanden (mit angepassten Koeffizienten) reduzieren.

Wir nehmen also $m > k$ an. Dann sind die $m + 1$ Vektoren $x_0, x_1, \ldots, x_m$ aus $M \subseteq \operatorname{aff}(M)$ affin abhängig, da $\dim \operatorname{aff}(M) = k$ ist. (1 Punkt)

Es existieren also Koeffizienten γ_i, $i = 1, \ldots, m$, die nicht alle null sind, sodass

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, (x_i - x_0) = 0.$$

Wir setzen zusätzlich noch

$$\gamma_0 \coloneqq - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i.$$

und erhalten

$$\sum_{i=0}^{m} \gamma_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{m} \gamma_i \, x_i = \gamma_0 \, x_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, x_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, (x_i - x_0) = 0.$$

Wir können also x auch als

$$x = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \, x_i - t \sum_{i=0}^{m} \gamma_i \, x_i = \sum_{i=0}^{m} (\alpha_i - t \, \gamma_i) \, x_i$$

darstellen mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$. (3 Punkte)

Den Freiheitsgrad t nutzen wir nun dazu, (mindestens) einen der Summanden zu eliminieren. Dazu bestimmen wir t (ähnlich wie beim Quotiententest (7.5)) als

$$t \coloneqq \min \left\{ \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \;\middle|\; i = 0, \ldots, m, \;\; \gamma_i > 0 \right\} = \frac{\alpha_\ell}{\gamma_\ell} > 0.$$

Beachte: Auf Grund von Definition der γ_0 gibt es immer mindestens einen Koeffizienten $\gamma_i > 0$.

Dann gilt also

$$x = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \ell}}^{m} \underbrace{(\alpha_i - t \, \gamma_i)}_{\geqslant 0} \, x_i \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \ell}}^{m} (\alpha_i - t \, \gamma_i) = 1,$$

d. h., x lässt sich tatsächlich bereits als Konvexkombination von m der Punkte $x_0, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots x_m$ schreiben. (2 Punkte)

Hausaufgabe 11.2 (Affine Hülle und Minkowskisumme) 4 Punkte

Es seien M_1, M_2 Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, welche Teilmengenrelation die Mengen $\operatorname{aff}(M_1 + M_2)$ und $\operatorname{aff}(M_1) + \operatorname{aff}(M_2)$ erfüllen. Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

Es gilt Mengengleichheit.

„$\subseteq$": Es seien Punkte $x_i \in M_1$, $y_i \in M_2$, $i = 1, \dots, n$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, dann ist

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in \operatorname{aff}(M_1) + \operatorname{aff}(M_2).$$

(2 Punkte)

„$\supseteq$": Es seien Linearkombinationen

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \operatorname{aff}(M_1) \quad \text{und} \quad y = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j \in \operatorname{aff}(M_2)$$

mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^m \beta_j = 1$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} x + y = x + \sum_{j=1}^m \beta_j y_j &= \sum_{j=1}^m \beta_j (x + y_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j (x + y_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \beta_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i + y_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (x_i + y_j) \in \operatorname{aff}(M_1 + M_2), \end{aligned}$$

da $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j = 1$. (2 Punkte)

Hausaufgabe 11.3 (Konvexität ist für Satz 15.21 notwendig.) 2 + 2 = 4 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer nichtkonvexen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ an, so dass:

(a) $\operatorname{int}(M) \neq \operatorname{int}(\overline{M})$
(b) $\partial M \neq \partial \overline{M}$

Lösung.

(a) Für $M = \mathbb{Q}$ für $n = 1$ ist bekannt, dass $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, aber $\operatorname{int}(\overline{(\mathbb{Q})}) = \operatorname{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ist. (2 Punkte)
(b) Im gleichen Beispiel wie oben erhält man $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aber $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. (2 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.