R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 10

Ausgabedatum: 16. Dezember 2024
Abgabedatum: 7. Januar 2025

Hausaufgabe 10.1 (Schranke an den Abstand zum globalen Minimierer) 4 + 1 = 5 Punkte

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine eigentliche, μ-stark konvexe Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass falls x^* ein globaler Minimierer von f über $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist

$$\|x - x^*\|^2 \le \frac{2}{\mu} |f(x) - f(x^*)|.$$

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass Punkt (a) i. A. nicht gilt, wenn x^* kein globaler Minimierer von f ist.

Hausaufgabe 10.2 (Beispiele von Projektionsaufgaben) 5 + 1 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung der orthogonalen Projektion auf einen affinen Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvexität der Zielmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Projektionsaufgabe (Beispiel 15.1) entscheidend für die Wohldefiniertheit der Aufgabe ist. Geben Sie dazu eine nichtleere, kompakte und nichtkonvexe Zielmenge C sowie einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ an, bei dem die gesamte Menge C Lösung der Projektionsaufgabe (15.1) für den Punkt p ist.

Hausaufgabe 10.3 (Dimension eines affinen Unterraums) 3 + 4 = 7 Punkte

Beweisen Sie Lemma 15.7 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen für einen affinen Unterraum $A \subset \mathbb{R}^n$.

(a) A besitzt genau dann eine affine Basis $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ aus $k+1$ Elementen mit $k \ge 0$, wenn $\dim A = k$ ist.

(b) Ist $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ eine affine Basis von A, dann lässt sich jedes Element von A auf eindeutige Art und Weise aus $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ affinkombinieren. Genauer hat jedes $x \in A$ die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, x_i$$

mit Koeffizienten $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)^\mathsf{T}$, die sich aus der eindeutigen Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ | & & | \\ x_0 & \cdots & x_k \\ | & & | \end{bmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ | \\ x \\ | \end{pmatrix}}_{=:b} \tag{$*$}$$

ergeben. Die Matrix $B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(k+1)}$ hat Rang $k+1$. Daher ist $B^\mathsf{T} B$ regulär, und ($*$) kann äquivalent als

$$B^\mathsf{T} B \, \alpha = B^\mathsf{T} b$$

geschrieben werden.

Zusatzaufgabe 10.4 (Hauptsatz der linearen Optimierung aus Sicht der konvexen Optimierung) 5 Bonuspunkte

(a) Es seien $C \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, kompakte, konvexe Menge und $f\colon C \to \mathbb{R}$ eine stetige, konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion f ihr *Supremum* in einem Extremalpunkt von C annimmt.

(b) Nutzen Sie Aussage (a), um Satz 6.21 Aussage (*iii*) für beschränkte Polyeder zu beweisen, also die folgende Aussage:

Es sei P ein beschränktes Polyeder. Besitzt das Problem

$$\text{Minimiere} \quad c^\mathsf{T} x \quad \text{über } x \in P$$

eine Lösung, so ist auch ein Extremalpunkt (einer Ecke) von P eine Lösung.

Zusatzaufgabe 10.5 (Randlage von Maximierern konvexer Funktionen.) 3 Bonuspunkte

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex. Zeigen Sie: Wenn f den Wert

$$\sup_{x \in \operatorname{dom} f} f(x)$$

in einem Punkt in $\operatorname{rel\,int}(\operatorname{dom} f)$ annimmt, dann ist f konstant auf $\operatorname{dom} f$.

Zusatzaufgabe 10.6 (Konvexität der Abstandsfunktion) 5 Bonuspunkte

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge. Zeigen Sie, dass der euklidische Abstand eines beliebigen Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zur Menge C, also

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_C &\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \operatorname{dist}_C(x) &\coloneqq \inf_{z \in C} \|x - z\|_2, \end{aligned}$$

eine konvexe Funktion ist.

Gilt die gleiche Aussage auch für nichtkonvexe Mengen C?

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.