Übung 9 (Lösung)

Ausgabedatum: 9. Dezember 2024
Abgabedatum: 16. Dezember 2024

Hausaufgabe 9.1 (Operationen auf konvexen Mengen) 1 + 2 + 4 + 2 = 9 Punkte

Beweisen Sie Satz 13.3 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen:

(a) Es sei $\{C_j\}_{j \in J}$ eine beliebige Familie konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{j \in J} C_j$ konvex.

(b) Es seien $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ konvex, $i = 1, \dots, k$. Dann ist das kartesische Produkt $C_1 \times \dots \times C_k$ konvex in $\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$.

(c) Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine (affin-)lineare Abbildung, also $f(x) = A\,x + b$, und $C \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $D \subseteq \mathbb{R}^m$ konvexe Mengen. Dann sind das Bild $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m$ und das Urbild $f^{-1}(D) \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex.

(d) Sind $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, dann sind die **Skalierung** (englisch: *scaling*)

$$\beta\, C_1 = \{\beta\, x_1 \,|\, x_1 \in C_1\} \quad \text{für } \beta \in \mathbb{R}$$

sowie die **Minkowski-Summe**

$$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \,|\, x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}$$

konvex.

Lösung.

(a) Es seien x und y aus $\bigcap_{j \in J} C_j$ gegeben. Auf Grund der Konvexität der C_j liegen auch die Punkte $\alpha x + (1 - \alpha) y$ für jedes $\alpha \in [0, 1]$ in jedem der C_j und damit auch in $\bigcap_{j \in J} C_j$. (1 Punkt)

(b) Es seien $(x_1, \dots, x_k)$ und $(y_1, \dots, y_k)$ aus $C_1 \times \cdots \times C_k$ gegeben. Da die Punkte x_i und y_i für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ in den konvexen Mengen $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ liegen, liegen auf Grund der Konvexität der C_i auch die Punkte $\alpha x_i + (1-\alpha) y_i$ für jedes $\alpha \in [0,1]$ in C_i und damit auch

$$\alpha(x_1, \dots, x_k) + (1-\alpha)\,(y_1, \dots, y_k) = (\alpha x_1 + (1-\alpha)\, y_1, \dots, \alpha x_k + (1-\alpha)\, y_k)$$

für jedes $\alpha \in [0,1]$ in $C_1 \times \cdots \times C_k$. (2 Punkte)

(c) Es seien x und y aus $f(C)$ gegeben. Dann existieren zwei Urbilder r und s aus C mit $x = f(r)$ und $y = f(s)$. Für jedes $\alpha \in [0,1]$ ist auf Grund der Konvexität von C auch $\alpha r + (1-\alpha)\, s \in C$, und wegen

$$f(\alpha r+(1-\alpha)\, s) = A(\alpha r+(1-\alpha)\, s)+b = \alpha(Ar+b)+(1-\alpha)\,(As+b) = \alpha f(r)+(1-\alpha)\, f(s) = \alpha x+(1-\alpha)\, y,$$

ist auch $\alpha x + (1-\alpha)\, y$ in $f(C)$. (2 Punkte)

Es seien nun x und y aus $f^{-1}(D)$ gegeben. Für jedes $\alpha \in [0,1]$ ist auf Grund der Konvexität von D auch

$$f(\alpha x + (1-\alpha)\, y) = A(\alpha x + (1-\alpha)\, y) + b = \alpha(Ax+b) + (1-\alpha)\,(Ay+b) = \alpha f(x) + (1-\alpha)\, f(y)$$

in D und damit $\alpha x + (1-\alpha)\, y$ in $f^{-1}(D)$. (2 Punkte)

(d) Es seien x und y aus $\beta C^1 + C^2$. Damit existieren $x_1,\ y_1 \in C^1$ und $x_2,\ y_2 \in C^2$, so dass

$$x = \beta x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad y = \beta y_1 + y_2$$

Auf Grund der Konvexität von C_1 und C_2 sind die Punkte

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)\, y_1 \quad \text{und} \quad \alpha x_2 + (1-\alpha)\, y_2$$

in C_1 respektive C_2. Somit ist

$$\alpha x + (1-\alpha)\, y = \alpha\beta x_1 + \alpha x_2 + (1-\alpha)\,\beta y_1 + (1-\alpha)\, y_2 = \beta(\alpha x_1 + (1-\alpha)\, y_1) + (\alpha x_2 + (1-\alpha)\, y_2)$$

in $\beta C^1 + C^2$. (2 Punkte)

Hausaufgabe 9.2 (Extremalpunkte konvexer Mengen) 1 + 1 + 3 + 1 = 6 Punkte

Die Definition Definition 6.15 eines Extremalpunkts eines Polyeders können wir mit Hilfe der Beobachtungen in Hausaufgabe 5.1 direkt auf allgemeinere konvexe Mengen erweitern.

Definition (Extremalpunkte konvexer Mengen).

Ein Vektor x aus einer konvexen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Extremalpunkt** von C, wenn aus

$$x = \alpha\, y + (1-\alpha)\, z$$

für $y, z \in C$ und $\alpha \in (0,1)$ bereits $y = z$ folgt.

(a) Bestimmen Sie, wieviele Extremalpunkte die abgeschlossene Kreisscheibe

$$K \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant r\}, \quad r > 0$$

besitzt.

(b) In Hausaufgabe 5.1 haben wir gezeigt, dass für jede Ecke eines Polyeders (jeden Extremalpunkt) eine lineare Funktion existiert, so dass die Ecke der eindeutige Minimierer der Funktion über dem Polyeder ist. Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass diese Aussage nicht für Extremalpunkte beliebiger kompakter, konvexer Menge gilt.

(c) Es sei eine Menge von Punkten $V = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Extremalpunkte von $\operatorname{conv}(V)$ in V liegen.

(d) Es sei eine konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in C \mid C \setminus \{x\} \text{ ist konvex}\}$ genau die Menge der Extremalpunkte von C ist.

Lösung.

(a) Die Kreisscheibe besitzt unendlich viele Extremalpunkte, denn die Menge der Extremalpunkte ist genau der Rand der Menge, also

$$\partial K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}.$$

Dass innere Punkte keine Extremalpunkte sein können ist klar. Für x aus ∂K und zwei Punkte $y \neq z (\neq x)$ mit $\|y\|$, $\|z\| \leqslant r$ und $\alpha \in (0, 1)$, so dass

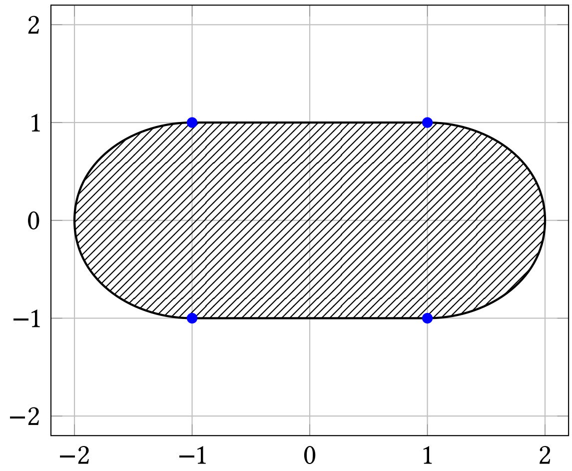
$$x = \alpha y + (1 - \alpha z)$$

ist auf Grund der strikten Konvexität der quadrierten Norm

$$r^2 = \|x\|^2 = \|\alpha y + (1 - \alpha z)\|^2 < \alpha \underbrace{\|y\|^2}_{\leqslant r^2} + (1 - \alpha) \underbrace{\|z\|^2}_{\leqslant r^2} \leqslant r^2,$$

was ein Widerspruch ist. (1 Punkt)

(b) In der folgenden Menge sind die vier markierten Punkte Extremalpunkte. Für keinen der Punkte existiert so eine Funktion (Hyperebene), wenn die Tangenten der gekrümmten Randabschnitte genau horiztonal in die horizontalen Randabschnitte eingehen.



(1 Punkt)

(c) Sei $x \in \operatorname{conv}(V)$ ein Extrempunkt von $\operatorname{conv}(V)$. Auf Grund von Lemma 13.7 wissen wir, dass $\operatorname{conv}(V)$ die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte in V ist. Da V endlich ist, wissen wir also, dass $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, k$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ existieren, so dass

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i.$$

Wir zeigen jetzt, dass nur eines der $\alpha_i > 0$ ist und damit 1 sein muss, womit die Aussage direkt folgt. (1 Punkt)

Angenommen, es wären zwei der $\alpha_i > 0$, o. B. d. A. seien das α_1 und α_2. Dann sind die Punkte

$$y = (\alpha_1 + \alpha_2)x_1 + \sum_{i=3}^k \alpha_i x_i$$

$$z = (\alpha_1 + \alpha_2)x_2 + \sum_{i=3}^k \alpha_i x_i$$

ebenfalls in $\operatorname{conv}(V)$, da sie Konvexkombinationen von den Punkten in V sind. Außerdem sind sie verschieden und es ist

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} y + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) \sum_{i=3}^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = x$$

und damit x eine echte Konvexkombination von y und z und damit x keine Ecke, was ein Widerspruch ist. (2 Punkte)

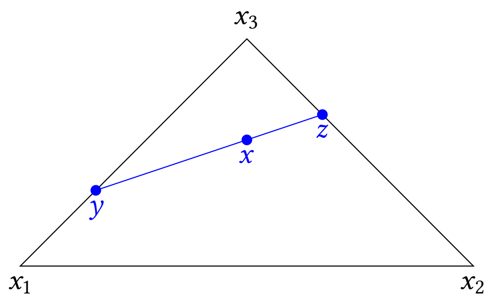


Abbildung 0.1: Der Punkt x wird aus allen $x_1, \dots, x_3$ zusammengesetzt, also $\alpha_1, \dots, \alpha_3 > 0$. Die Punkte y und z sind die Punkte, die entstehen, wenn die Anteile α_2 respektive α_1 in den jeweils anderen Anteil gesteckt werden als $\widetilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ oder $\widetilde{\alpha}_2 = \alpha_1 + \alpha_2$.

(d) Ohne die Konvexitätseigenschaft zu zerstören, können wir aus C genau die Punkte x einzeln entfernen, die nicht auf einer Verbindungsgerade zwischen zwei verschiedenen Punkten y, z aus C liegen. Das sind nach Definition genau die Extremalpunkte. (1 Punkt)

Hausaufgabe 9.3 (Operationen auf konvexen Funktionen) 1 + 2 + 2 + 1 = 6 Punkte

Beweisen Sie Satz 13.18 aus der Vorlesung, also die folgenden Aussagen:

(a) Sind $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$ und $\beta_i \geqslant 0$ für $i = 1, \dots, m$, dann ist die durch

$$f(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i(x)$$

definierte Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Sind die Funktionen $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$ für alle i aus irgendeiner Indexmenge I, dann ist die durch das punktweise Supremum

$$f(x) \coloneqq \sup\{f_i(x) \mid i \in I\}$$

definierte Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$.

(c) Ist $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ affin-linear und $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex, so ist $(f \circ g) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$.

(d) Ist $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und ist $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex und monoton wachsend, so ist $(f \circ g) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex.

Lösung.

(a) Es seien x und y aus $\mathbb{R}^n$ sowie $\alpha \in [0,1]$ gegeben. Dann ist auf Grund der Konvexität der einzelnen f_i auch

$$\begin{aligned} f(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y) &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, f_i(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, (\alpha\, f_i(x) + (1-\alpha)\, f_i(y)) \\ &= \alpha\, f(x) + (1-\alpha)\, f(y). \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b) Es seien x und y aus $\mathbb{R}^n$ sowie $\alpha \in [0,1]$ gegeben, so dass der Ausdruck $\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ definiert ist (er ist dann auch für alle anderen $\alpha \in [0,1]$ definiert). Ist dieser Ausdruck auch für alle f_i definiert, dann ist

$$\begin{aligned} f(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y) &= \sup\{f_i(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y) \mid i \in I\} \\ &\le \sup\{\alpha\, f_i(x) + (1-\alpha)\, f_i(y) \mid i \in I\} \\ &\le \alpha \sup\{f_i(x) \mid i \in I\} + (1-\alpha) \sup\{f_i(y) \mid i \in I\} \\ &= \alpha\, f(x) + (1-\alpha)\, f(y). \end{aligned}$$

Falls es ein f_i gibt, so dass der Ausdruck nicht definiert ist, dann nimmt f_i an x und y jeweils genau einmal den Wert ∞ und $-\infty$ an. Dort, wo f_i den Wert ∞ annimmt, nimmt dann natürlich auch f den Wert ∞ an und da die rechte Seite für f definiert ist, muss also $\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) = \infty$ sein, womit die Ungleichung offensichtlich erfüllt ist. (2 Punkte)

(c) Es seien x und y aus $\mathbb{R}^n$ sowie $\alpha \in [0,1]$ gegeben, so dass der Ausdruck $\alpha f \circ g(x) + (1-\alpha) f \circ g(y)$ definiert ist (er ist dann auch für alle anderen $\alpha \in [0,1]$ definiert). Dann ist

$$\begin{aligned} f \circ g(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y) &= f(g(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y)) \\ &= f(\alpha\, g(x) + (1-\alpha)\, g(y)) \\ &\leqslant \alpha\, f(g(x)) + (1-\alpha)\, f(g(y)) \\ &= \alpha\, f \circ g(x) + (1-\alpha)\, f \circ g(y). \end{aligned}$$

(2 Punkte)

(d) Es seien x und y aus $\mathbb{R}^n$ sowie $\alpha \in [0,1]$ gegeben, so dass der Ausdruck $\alpha f \circ g(x) + (1-\alpha) f \circ g(y)$ definiert ist (er ist dann auch für alle anderen $\alpha \in [0,1]$ definiert). Dann ist

$$f(g(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y)) \le f(\alpha\, g(x) + (1-\alpha)\, g(y)) \le \alpha\, f(g(x)) + (1-\alpha)\, f(g(y)).$$

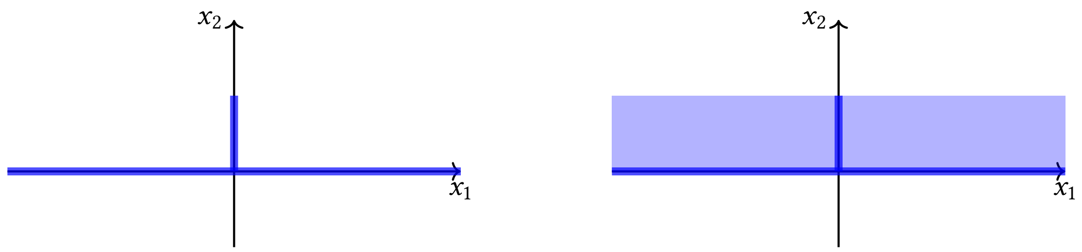


Abbildung 0.2: Abgeschlossene Menge M (links) und abgeschlossene Menge M mit nicht abgeschlossener konvexer Hülle (rechts)

(1 Punkt)

Zusatzaufgabe 9.4 (Stabilität von Abgeschlossenheit unter Bildung der konvexen Hülle.) 3 Bonuspunkte

Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, dann ist auch $\operatorname{conv}(M)$ abgeschlossen.

Lösung.

Die Aussage gilt nicht, denn für

$$M \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 \in [0,1]\}$$

ist

$$\operatorname{conv}(M) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in [0,1)\} \cup \{(0,1)\}$$

und damit nicht abgeschlossen. (3 Punkte)

Zusatzaufgabe 9.5 (Jensensche Ungleichung) 4 Bonuspunkte

Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann konvex ist, wenn für jede beliebige endliche Mengen von Punkten $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathbb{R}^n$ und beliebige $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^\top \geqslant 0$

$$f\Big(\sum_{i=1}^k \alpha_i\, x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^k \alpha_i\, f(x_i)$$

gilt.

Lösung.

Die Implikation $\Leftarrow$ gilt offensichtlich, denn die Definition der Konvexität ist ein Spezialfall der Voraussetzung mit $m = 2$. (1 Punkt)

Die Implikation $\Rightarrow$ zeigen wir induktiv. Sei dafür f konvex. Für $k = 1$ ist die Aussage offensichtlich erfüllt. Für $k = 2$ entspricht die Aussage genau der Definition der Konvexität von f. (1 Punkt)

Für den Induktionsschritt sei nun $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1})$ mit $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}) \geqslant 0$ gegeben. Falls nur ein Faktor $\alpha_i = 1$ ist und der Rest der Vorfaktoren α verschwindet ist nichts zu zeigen. Ansonsten sei o. B. d. A. $\alpha_{k+1} < 1$. Dann setzen wir

$$\widetilde{\alpha}_i \coloneqq \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} \quad \text{für } i = 1, \ldots, k.$$

Damit ist $(\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k) \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{k} \widetilde{\alpha}_i = 1$. Aus der Konvexität von f und der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
f\Big(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i\, x_i\Big) &= f\Big((1 - \alpha_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\alpha}_i\, x_i + \alpha_{k+1}\, x_{k+1}\Big) \\
&\leq (1 - \alpha_{k+1})\, f\Big(\sum_{i=1}^{k} \widetilde{\alpha}_i\, x_i\Big) + \alpha_{k+1}\, f(x_{k+1}) \\
&\leq (1 - \alpha_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\alpha}_i f(x_i) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i\, f(x_i).
\end{aligned}$$

(2 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.