R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 8 (Lösung)

Ausgabedatum: 2. Dezember 2024
Abgabedatum: 9. Dezember 2024

Hausaufgabe 8.1 (Äquivalenzen (totaler) Unimodularität) 12 + 6 = 18 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist total unimodular.

(ii) $-A$ ist total unimodular.

(iii) $A^\top$ ist total unimodular.

(iv) $\begin{bmatrix} A, & -A \end{bmatrix}$ ist total unimodular.

(v) $\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$ ist total unimodular.

(vi) $\begin{bmatrix} A \\ \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ ist total unimodular.

(vii) $\begin{bmatrix} A, & 0_{m\times n} \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ ist total unimodular.

und dass diese Aussagen weiterhin äquivalent sind zu den Aussagen

$(viii)$ $\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$ ist unimodular.

(ix) $\begin{bmatrix} A \\ \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ ist unimodular.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist unimodular

(ii) $A^\top$ ist unimodular

(iii) $\begin{bmatrix} A, & 0_{m\times n} \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ ist unimodular.

Beachte: Wir sehen also, dass die (totale) Unimodularität der Gleichungsnebenbedingungsmatrizen von LPs stabil gegenüber Transformationen zwischen den verschiedenen Formulierungen des Problems (kanonische Form, Normalform, etc.) ist.

Lösung.

(a) Aussage (i) ⇔ Aussage (ii): Die quadratischen Untermatrizen der Dimensionen $1 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$ von A und $-A$ stimmen bis auf das Vorzeichen überein. Durch den Vorzeichenwechsel gilt für die Untermatrizen $\widehat{A} \in \mathbb{Z}^{r\times r}$ von A und $-\widehat{A}$ von $-A$ daher $\det(\widehat{A}) = (-1)^r \det(-\widehat{A})$, woraus direkt die Aussage folgt. (1 Punkt)

Aussage (i) ⇔ Aussage (iii): Die quadratischen Untermatrizen der Dimensionen $1 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$ von A und A^T stimmen bis auf Transposition überein, denn für jede Wahl von Zeilen und Spalten einer der beiden Matrizen ergibt sich die transponierte Untermatrix durch Auswahl der Spalten und Zeilen der jeweils anderen Matrix. Die Determinante einer Matrix und ihrer transponierten Matrix stimmen überein, woraus direkt die Aussage folgt. (1 Punkt)

Die Implikationen Aussage (i) ⇐ Aussagen (iv) bis (vii) lassen sich alle auf ein und demselben Weg zeigen: Es sei A nicht total unimodular, sodass eine Untermatrix $\widehat{A}$ von A mit $\det(\widehat{A}) \notin \{0, \pm1\}$ existiert. Die gleiche Auswahl von Spalten und Zeilen zeigt, dass $\widehat{A}$ auch eine Untermatrix der Matrizen in Aussagen (iv) bis (vii) ist, weshalb diese Matrizen auch nicht total unimodular sein können. (1 Punkt)

Aussage (i) ⇒ Aussage (iv): Es sei $\widehat{A} \in \mathbb{Z}^{r\times r}$ mit $1 \leqslant r \leqslant \min\{m, 2\,n\}$ eine Untermatrix von $\begin{bmatrix} A, & -A \end{bmatrix}$. Wir bezeichnen mit S und Z die Indexmengen der gewählten Spalten bzw. Zeilen und setzen

$$S_1 \coloneqq S \cap \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad S_2 \coloneqq S \cap \{n+1, \dots, 2\,n\},$$

Ist die Menge $S_1 \cap (S_2 - n)$ nichtleer, dann enthält $\widehat{A}$ linear abhängige Spalten und hat damit die Determinante 0. Anderenfalls entspricht $\widehat{A}$ der Untermatrix $\widehat{A}_+$ von A, die durch Auswahl der Spalten $(S_1 \cup (S_2 - n)$ und der Zeilen zu Z bis darauf, dass die $l \coloneqq |S_2|$ Spalten zu den Indizes $(S_2 - n$ mit -1 multipliziert wurden. Da A nach Voraussetzung total unimodular ist, ist damit $\det(\widehat{A}) = (-1)^l \det(\widehat{A}_+) \in \{0, \pm1\}$. (1 Punkt)

Aussage (i) ⇒ Aussage (v): Es sei $\widehat{A} \in \mathbb{Z}^{r\times r}$ mit $1 \leqslant r \leqslant \min\{m, n+m\}$ eine Untermatrix von $\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$. Wir bezeichnen mit S und Z die Indexmengen der gewählten Spalten bzw. Zeilen und setzen

$$S_1 \coloneqq S \cap \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad S_2 \coloneqq S \cap \{n+1, \dots, n+m\},$$

Ist die Menge S_2 leer, dann entspricht $\widehat{A}$ einer Untermatrix von A, und erfüllt damit $\det(\widehat{A}) \in \{0, \pm 1\}$. Ist die Menge S_2 nichtleer aber $(S_2 - n) \not\subseteq Z$, dann enthält $\widehat{A}$ eine Nullspalte und damit ist $\det \widehat{A} = 0$. Anderenfalls enthält $\widehat{A}$ hinten $l \coloneqq |S_2|$ Einheitsspalten aus dem $\mathbb{R}^r$. Entwickeln wir die Determinante von $\widehat{A}$ in den ersten l Entwicklungsschritte nach genau diesen Spalten, dann ergibt sich entweder direkt $\det(\widehat{A}) \in \{\pm 1\}$ falls $l = m$ oder $\det(\widehat{A}) \in \{\pm \det(\widehat{A}_-)\}$ für die Untermatrix $\widehat{A}_-$ von A, die durch zusätzliches Streichen der Spalten zu S_2 und der Zeilen zu $S_2 - n$ entsteht, und welche wegen der totalen Unimodularität von A auch $\det(\widehat{A}_-) \in \{0, \pm 1\}$ erfüllt. (1 Punkt)

Aussage (i) $\Rightarrow$ Aussage (vi): Man kann diese Implikation genau so zeigen wie die vorherige mit vertauschten Rollen von Zeilen und Spalten, oder man nutzt, was man schon bewiesen hat und erkennt, dass $A^\intercal$ nach Aussage (iii) total unimodular ist, weshalb nach Aussage (v) auch $\begin{bmatrix} A^\intercal, & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ total unimodular ist und wieder nach Aussage (iii) daher auch $\begin{bmatrix} A, \\ \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ total unimodular ist. (1 Punkt)

Aussage (i) $\Rightarrow$ Aussage (vii): Es sei $\widehat{A} \in \mathbb{Z}^{r \times r}$ mit $1 \leqslant r \leqslant \min\{m + n, 2\,n\}$ eine Untermatrix von

$$\begin{bmatrix} A, & 0_{m \times n} \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit S und Z die Indexmengen der gewählten Spalten bzw. Zeilen und setzen

$$\begin{aligned} S_1 &\coloneqq S \cap \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad & S_2 &\coloneqq S \cap \{n + 1, \ldots, 2\,n\}, \\ Z_1 &\coloneqq Z \cap \{1, \ldots, m\} \quad \text{und} \quad & Z_2 &\coloneqq Z \cap \{m + 1, \ldots, m + n\}, \end{aligned}$$

Die Argumente sind nun sehr ähnlich zum obigen Fall Aussage (i) $\Rightarrow$ Aussage (v), nur müssen hier mehr Fälle unterschieden werden.

Ist die Menge S_2 leer, dann ist $\widehat{A}$ entweder eine Untermatrix von A (Z_2 leer), eine Matrix mit Nullzeilen (Z_2 nichtleer aber $(Z_2 - m) \not\subseteq S_1$) oder hat $l \coloneqq |Z_2|$ Einheitszeilen aus dem $\mathbb{R}^r$, ist also im Fall $l = r$ eine Einheitsmatrix. Ansonsten können wir die Determinante nach den Einheitszeilen entwickeln und erhalten $\det(\widehat{A}) \in \{\pm \det(\widehat{A}_-)\}$ für die Untermatrix $\widehat{A}_-$ von A, die aus der Auswahl der Spalten $S_1 \setminus (Z_2 - m)$ und der Zeilen zu Z_1 entsteht. In jedem Fall ist $\det(\widehat{A}) \in \{0, \pm 1\}$.

Ist die Menge S_2 nichtleer aber $(S_2 - n) \not\subseteq (Z_2 - m)$, dann hat $\widehat{A}$ eine Nullspalte und die Determinante ist 0.

Anderenfalls hat $\widehat{A}$ hinten $l \coloneqq |S_2|$ Einheitsspalten aus dem $\mathbb{R}^r$, ist also im Fall $l = r$ eine Einheitsmatrix. Ansonsten können wir die Determinante nach diesen Einheitsspalten entwickeln und erhalten $\det(\widehat{A}) \in \{\pm \det(\widehat{A}_-)\}$ für eine Untermatrix $\widehat{A}_-$ von der Matrix $\begin{bmatrix} A \\ \mathrm{Id}_{(Z_2 - m) \setminus (S_2 - n)} \times S_1 \end{bmatrix}$ bei der die letzten Zeilen durch die Matrix gegeben sind, die durch die Auswahl der Spalten

S_1 und der Zeilen $(Z_2 - m) \setminus (S_2 - n)$ aus der Einheitsmatrix Id_m entsteht. Eine analoge Fallunterscheidung wie oben für die Mengen S_1 und $(Z_2 - m) \setminus (S_2 - n)$ für darauf, dass diese Determinante 0 ist oder der einer Untermatrix von A bis auf Vorzeichen entspricht. In jedem Fall ist $\det(\widehat{A}) \in \{0, \pm 1\}$. (2 Punkte)

Die Implikationen Aussage *(i)* $\Rightarrow$ Aussagen *(viii)* und *(ix)* sind klar, denn Aussage *(i)* ist äquivalent zu Aussagen *(v)* und *(vi)*, welche wiederum Aussage *(viii)* respektive Aussage *(ix)* implizieren. (1 Punkt)

Aussage *(i)* $\Leftarrow$ Aussage *(viii)*: Es sei also $\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ unimodular und eine Untermatrix $\widehat{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ mit $1 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$ von A gegeben, deren Spalten- und Zeilenauswahlindexmengen wir mit S und Z bezeichnen. Wir betrachten nun die $m \times m$ Untermatrix $\widehat{A}_+$ von $\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$, die durch die Auswahl von den Spalten zu $S_+ \coloneqq S \cup (n + (\{1, \ldots, m\} \setminus Z))$ und allen Zeilen entsteht, und von der wir auf Grund der Unimodularität von A wissen, dass $\det(\widehat{A}_+) \in \{0, \pm 1\}$. Außerdem hat $\widehat{A}_+$ hinten $m - r \geqslant 0$ Einheitsspalten aus $\mathbb{R}^m$. Entwickeln wir nach diesen Spalten, dann erhalten wir sofort, dass auch $\det(\widehat{A}_+) \in \{\pm \det(\widehat{A})\}$, was nur der Fall sein kann, wenn $\det(\widehat{A}) \in \{0, \pm 1\}$, also ist A total unimodular. (2 Punkte)

Aussage *(i)* $\Leftarrow$ Aussage *(ix)*: Folgt wieder mit getauschten Rollen von Spalten und Zeilen wie im obigen Schritt, oder wieder darüber, dass die transponierte Matrix einer unimodularen Matrix unimodular ist und die transponierte einer total unimodulare Matrix total unimodular ist aus dem obigen Schritt. (1 Punkt)

(b) Aussage *(i)* $\Leftrightarrow$ Aussage *(ii)*: Die quadratischen Untermatrizen der Dimension $\min(m, n)$ von A und $A^\intercal$ stimmen bis auf Transposition überein und haben daher die gleiche Determinante. (1 Punkt)

Für die Äquivalenz Aussage *(i)* $\Leftrightarrow$ Aussage *(iii)* betrachten wir zunächst den Fall $m \le n$. Hier haben die Untermatrizen der erweiterten Matrix die Dimension $n + m \times n + m$.

Aussage *(i)* $\Leftarrow$ Aussage *(iii)* für $m \le n$: Ist die erweiterte Matrix unimodular und $\widehat{A}$ eine $m \times m$ Untermatrix von A, dann betrachten wir die Untermatrix $\widehat{A}_+$ der erweiterten Matrix zur Spaltenauswahl $\{1, \ldots, n\} \cup (S + n)$ und der Auswahl aller Zeilen. Deren Determinante ist auf Grund der Unimodularität in $\{0, \pm 1\}$. Außerdem enthält $\widehat{A}_+$ hinten m Einheitsvektoren. Entwickeln wir die Determinante von $\widehat{A}_+$ zuerst nach diesen Spalten, dann erhalten wir, dass $\det(\widehat{A}_+) \in \{\pm \det(\begin{bmatrix} \widehat{A} \\ E_{\{1,\ldots,n\} \setminus S} \end{bmatrix})\}$ ist, wobei die Matrix $E_{\{1,\ldots,n\} \setminus S}$ aus den Einheitsvektoren zu den Indizes $\{1, \ldots, n\} \setminus S$ besteht. Entwickeln wir die Determinante nach diesen Zeilen, dann erhalten wir, dass $\det(\widehat{A_+}) \in \{\pm \det(\widehat{A})\}$ ist und damit A unimodular ist.

Aussage *(i)* $\Rightarrow$ Aussage *(iii)* für $m \le n$: Ist A unimodular und $\widehat{A}$ eine $n + m \times n + m$ Untermatrix der erweiterten Matrix zur Auswahl von $n + m$ Spaltenindizes S. Wir bezeichnen die vorderen und hinteren Spaltenindizes mit

$$S_1 \coloneqq S \cap \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad S_2 \coloneqq S \cap \{n + 1, \ldots, 2\,n\}.$$

Für diese muss immer $|S_1 \cap (S_2 - n)| \geqslant m$ sein. Ist $|S_1 \cap (S_2 - n)| > m$, dann enthält $\widehat{A}$ eine Nullzeile, denn in den letzten n Zeilen stehen höchstens $n + m - |S_1 \cap (S_2 - n)|$ Nichtnullzeilen, dann ist also $\det(\widehat{A}) = 0$. Wenn $|S_1 \cap (S_2 - n)| = m$, dann können wir die Determinante von $\widehat{A}$ nach den hinteren Einheitsspalten entwickeln und erhalten die Beziehung $\det(\widehat{A}) \in \{\pm \det(\widehat{A}_-)\} \subseteq \{0, \pm 1\}$ für die $m \times m$ Untermatrix $\widehat{A}_-$ von A zur Spaltenauswahl $S_1 \cap (S_2 - n)$. (3 Punkte)

Den Fall $m \geq n$ zeigen wir unter Ausnutzung von Aussage (ii). Wir zeigen also, dass wenn $m \leq n$ ist, dann ist die erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \\ 0_{m \times n} & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$$

unimodular, genau dann wenn A unimodular ist. Die Aussage folgt dann für den Fall $m \geq n$ indem wir

$$\begin{bmatrix} A^\intercal, & \mathrm{Id}_n \\ 0_{n \times m} & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$$

untersuchen und nochmals Aussage (ii) verwenden.

Aussage (i) $\Longleftarrow$ Aussage (iii) für $m \geq n$: Es sei die Matrix

$$\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \\ 0_{m \times n} & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$$

unimodular und $\widehat{A}$ eine $m \times m$ Untermatrix von A zur Spaltenwahl S. Dann betrachten wir die $2\,m \times 2\,m$ Untermatrix $\widehat{A}_+$ der erweiterten Matrix zur Spaltenwahl $S \cup \{n+1, \ldots, n+m\}$ mit allen Zeilen. Entwickeln der Determinante von $\widehat{A}_+$ nach den letzten m Zeilen ergibt direkt $\det(\widehat{A}_+) \in \{\pm \det(\widehat{A})\}$, und auf Grund der Unimodularität der erweiterten Matrix auch $\det(\widehat{A}) \in \{0, \pm 1\}$ und damit die Unimodularität von A.

Aussage (i) $\Longrightarrow$ Aussage (iii) für $m \geq n$: Es sei nun A unimodular und $\widehat{A}$ eine $2\,m \times 2\,m$ Untermatrix der erweiterten Matrix zur Spaltenwahl S mit

$$S_1 \coloneqq S \cap \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad S_2 \coloneqq S \cap \{n+1, \ldots, n+m\}.$$

Falls $S_2 \neq \{n+1, \ldots, n+m\}$, dann enthält $\widehat{A}$ eine Nullzeile und hat Determinante 0. Anderenfalls stehen unten in $\widehat{A}$ genau m Einheitsvektoren, nach denen wir die Determinante entwicklen können und $\det(\widehat{A}) \in \{\pm \det(\widehat{A}_-)\} \subseteq \{0, \pm 1\}$ für die $m \times m$ Untermatrix $\widehat{A}_-$ von A zur Spaltenauswahl S_1 erhalten. (2 Punkte)

Hausaufgabe 8.2 8 + 4 = 12 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$.

(a) Zeigen Sie Satz 12.3 aus dem Skript, also dass die folgenden Aussagen äquivalent sind, falls $\operatorname{Rang}(A) = m$.

(i) A ist unimodular.

(ii) Für jeden Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ besitzt das Polyeder

$$P_{\text{NF}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x = b,\ x \geqslant 0\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

(iii) Für jedes Paar von Vektoren $b \in \mathbb{Z}^m$, $u \in \mathbb{Z}^n$ besitzt das Polyeder

$$P_{\text{NFB}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x = b,\ x \geqslant 0,\ x \leqslant u\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

(b) Zeigen Sie Satz 12.5, also dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) A ist total unimodular.

(ii) Für jeden Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ besitzt das Polyeder

$$P_{\text{KF}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x \le b,\ x \geqslant 0\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

(iii) Für jedes Paar von Vektoren $b \in \mathbb{Z}^m$, $u \in \mathbb{Z}^n$ besitzt das Polyeder

$$P_{\text{KFB}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x \le b,\ x \geqslant 0,\ x \le u\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

Lösung.

(a) Aussage (i) $\Rightarrow$ Aussage (ii): Es sei $b \in \mathbb{Z}^m$ beliebig. Aus Satz 6.19 folgt, dass die Menge der Ecken von P_{NF} genau die Menge der zulässigen Basisvektoren ist. Es sei nun x eine Ecke von P_{NF}, also ein zulässiger Basisvektor zu irgendeiner Basis B. Die Basismatrix A_B in der Darstellung $A_B x_B = b$ ist nach Voraussetzung unimodular, ihre Inverse A_B^{-1} besitzt also nach Satz 12.2 nur ganzzahlige Einträge. Damit sind also $x_B = A_B^{-1} b$ und $x_N = 0$ ganzzahlig. (2 Punkte)

Aussage (i) $\Leftarrow$ Aussage (ii): Wir benutzen die Charakterisierung unimodularer Matrizen über ihre Inverse aus Satz 12.2. Dazu müssen wir zeigen, dass die Inverse jeder regulären Untermatrix $\widehat{A}$ der Dimension m nur ganzzahlige Einträge hat. Es sei also $\widehat{A}$ eine solche Matrix, dann gibt es eine Basis B, sodass $\widehat{A} = A_B$ eine Basismatrix von A ist. Wir betrachten die j-te Spalte von A_B^{-1}, also

$A_B^{-1}e_j$ mit dem Einheitsvektor $e_j \in \mathbb{Z}^m$. Wir wählen einen Vektor $y \in \mathbb{Z}^m$ mit der Eigenschaft $x_B \coloneqq A_B^{-1}e_j + y \geqslant 0$. Dann ist $A_B x_B = \underbrace{e_j + A_B y}_{b:=} \in \mathbb{Z}^m$. Wir füllen x_B durch Nullen auf und erhalten den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist xf?? ein zulässiger Basisvektor des Normalform-Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = e_j + A_B y,\ x \geqslant 0\}$. Nach Voraussetzung ist $x \in \mathbb{Z}^n$ und daher auch $x_B \in \mathbb{Z}^m$. Daraus folgt, dass $A_B^{-1}e_j = x_B - y$ ebenfalls in $\mathbb{Z}^m$ liegt, was zu zeigen war. (3 Punkte)

Aussage (i) $\Leftrightarrow$ Aussage (iii): Wir führen für die Boxschranken Slackvariablen ein und erhalten das Normalformpolyeder

$$\widetilde{P}_{\text{NFB}} \coloneqq \left\{(x,s) \in \mathbb{R}^{n+n} \,\middle|\, \begin{bmatrix} A, & 0_{m\times n} \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix},\ (x,s) \geqslant 0 \right\}.$$

Dabei ist die Matrix

$$\begin{bmatrix} A, & 0_{m\times n} \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$$

genau dann unimodular, wenn A unimodular ist (siehe Hausaufgabe 8.1 bzw. Lemma 12.4) und hat genau dann vollen Rang, wenn A vollen Rang hat. Das Polyeder $\widetilde{P}_{\text{NFB}}$ hat also genau dann nur ganzzahlige Ecken für jedes Paar von Vektoren $b \in \mathbb{Z}^m$, $u \in \mathbb{Z}^n$, wenn A unimodular ist. (2 Punkte)

Da die Ecken von $\widetilde{P}_{\text{NFB}}$ und P_{NFB} über die Abbildungen

$$x \mapsto (x, u - x) \quad \text{und} \quad (x,s) \mapsto x$$

bijektiv ineinander überführt werden können, ist auch klar, dass $\widetilde{P}_{\text{NFB}}$ genau dann nur ganzzahlige Ecken hat wenn P_{NFB} nur ganzzahlige Ecken hat. (1 Punkt)

(b) Aussage (i) $\Leftrightarrow$ Aussage (ii): Die Matrix A ist genau dann total unimodular, wenn die Matrix $\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id} \end{bmatrix}$ unimodular ist (siehe Hausaufgabe 8.1 bzw. Lemma 12.4). Nach Punkt (a) ist das genau dann der Fall, wenn

$$\widetilde{P}_{\text{KF}} \coloneqq \left\{(x,s) \in \mathbb{R}^{n+m} \,\middle|\, \begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b,\ (x,s) \geqslant 0 \right\}.$$

für jeden Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ nur ganzzahlige Ecken besitzt. (2 Punkte)

Da die Ecken von $\widetilde{P}_{\text{KF}}$ und P_{KF} über die Abbildungen

$$x \mapsto (x, b - Ax) \quad \text{und} \quad (x,s) \mapsto x$$

bijektiv ineinander überführt werden können,ist auch klar, dass $\widetilde{P}_{\text{KF}}$ genau dann nur ganzzahlige Ecken hat wenn P_{KF} nur ganzzahlige Ecken hat. (1 Punkt)

Aussage (i) $\Leftrightarrow$ Aussage (iii): Wir stellen fest, dass P_{KFB} mit dem Polyeder

$$\widetilde{P}_{\text{KFB}} \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{bmatrix} A \\ \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} x \le \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix},\ x \geqslant 0 \right\}$$

übereinstimmt. Außerdem ist A genau dann total unimodular, wenn $\begin{bmatrix} A \\ \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$ total unimodular ist (siehe Hausaufgabe 8.1 bzw. Lemma 12.4). Die behauptete Äquivalenz folgt dann direkt, weil wir bereits gezeigt haben, dass Aussage (i) $\Leftrightarrow$ Aussage (ii). (1 Punkt)

Hausaufgabe 8.3 — 4 Punkte

Es sei ein LP in Normalform gegeben, wobei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ total unimodular ist und $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$. Zeigen Sie, dass das primale Polyeder und das duale Polyeder nur ganzzahlige Ecken haben.

Lösung.

Für das primale Polyeder folgt das sofort aus Satz 12.5 bzw. Hausaufgabe 8.2. Hierfür genügt uns sogar die Unimodularität von A. (1 Punkt)

Für das duale Polyeder

$$P_{\text{D}} \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid A^\intercal \lambda \le b\}$$

formulieren wir das Polyeder mit “gesplittetem” Positiv- und Negativteil

$$P_{\text{D}}^{+,-} \coloneqq \left\{ (\lambda^+, \lambda^-) \in \mathbb{R}^{2m} \;\middle|\; \left[A^\intercal, -A^\intercal\right] \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{pmatrix} \le b,\ (\lambda^+, \lambda^-) \ge 0 \right\}$$

(1 Punkt)

Nach Lemma 12.4 bzw. Hausaufgabe 8.1 ist $\left[A^\intercal, -A^\intercal\right]$ total unimodular, damit hat $P_{\text{D}}^{+,-}$ nach Satz 12.5 bzw. Hausaufgabe 8.2 nur ganzzahlige Ecken. Das ist genau dann der Fall, wenn λ in $\mathbb{R}^m$ ganzzahlig ist. (2 Punkte)

Zusatzaufgabe 8.4 (Zuordnungsproblem) — 7 + 1 + 3 = 11 Bonuspunkte

In einem Impfzentrum sind k Termine frei, für die sich l InteressentInnen gemeldet haben. An jedem Termin kann höchstens eine Person geimpft werden, jede Person darf höchstens einmal geimpft werden. Für jede/n der InteressentInnen ist bei der Voranmeldung erhoben worden, welcher der

Termine wahrgenommen werden kann. Ziel ist, möglichst vielen Personen einen wahrnehmbaren Termin zuzuteilen.

(a) Formulieren Sie ein LP, anhand dessen optimaler Basisvektoren Sie optimale Zuordnungen von InteressentInnen zu Terminen ablesen können und erklären Sie, warum das möglich ist und wie sie das Problem lösen können.

(b) Das Personal im Zentrum wurde verdoppelt, an jedem Termin können nun 2 Personen bedient werden. Wie müssen Sie ihr LP modifizieren, um diese Änderung zu modellieren?

(c) Jede Person, die geimpft wird, muss nun zweimal geimpft werden, wobei der Abstand zwischen den beiden Impfungen mindestens 14 Tage betragen muss. Wie können Sie ihr Vorgehen anpassen, um diese Änderung abzudecken?

Lösung.

Beachte: Zusätzlichen untere Schranken baut man ein, indem man x durch $\tilde{x} \coloneqq x - l$ und u durch $\tilde{u} \coloneqq u - l$ ersetzt. Alle Störterme sind dann ganzzahlig.

(a) Wir bauen zuerst einen einfachen, gerichteten Graphen, der das Problem modelliert, indem wir alle k Termine und alle l Personen mit Knoten identifizieren. Dabei sollen die ersten l Knoten V_1 den Personen entsprechen und die Knoten $l+1$ bis $l+k$ den Terminen (V_2). Für jede Person $i \in \{1, \dots, l\}$ fügen wir für jeden wahrnehmbaren Termin $j \in \{l+1, \dots, l+k\}$ eine Kante ein, die an i startet und an j endet und erhalten so n Kanten. (3 Punkte)

Die Knotenkanten Inzidenzmatrix $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ des einfachen, gerichteten Graphen ist total unimodular und nichtpositiv in A_1 (die Kanten starten von den Personen) und nichtnegativ in A_2 (die Kanten enden in den Terminen). Wir formulieren das Problem

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & -\mathbf{1}^\mathsf{T} x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & \begin{bmatrix} -A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} x \le \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad & x \ge 0 \end{aligned}$$

in der Variable x, die angibt, ob eine Kante gewählt wird (eine Zuordnung stattfindet). Die Nebenbedingungen geben dabei an, dass nicht mehr als ein Termin pro Person zugeordnet wird und nicht mehr als eine Person pro Termin. Die Nebenbedingungen sorgen außerdem dafür, dass $x \in [0,1]^n$. (2 Punkte)

Die Modifikation $A_1 \to -A_1$ erhält die Unimodularität der Problemmatrix (Untermatrizen haben höchstens geflipptes Vorzeichen). Nach Hausaufgabe 8.2 bzw. Satz 12.5 sind alle Ecken des

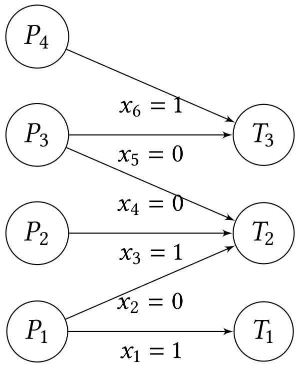

Abbildung 0.1: Gerichteter Graph und eine optimale Lösung für das Zuordnungsproblem in Teilaufgabe (a) mit vier Personen P_i und drei Terminen T_i.

Polyeders ganzzahlig. Lösen wir z. B. mit dem Simplex Algorithmus ist die Lösung eine optimale Ecke. Da x ganzzahlig ist und in $[0,1]^n$ folgt, dass $x \in \{0,1\}^n$ und die Anzahl der aktiven Kanten/Zuordnungen in x ist maximiert. Die Belegung der Personen zu den Terminen können wir direkt ablesen. (2 Punkte)

(b) Wir setzen die obere Schranke in den hinteren Komponenten auf 2. (1 Punkt)

(c) Zuerst mal müssen wir den Graphen modifizieren. Wir behalten die zwei Knotenlayer aus Interessenten V_1 und Einzelterminen V_3. Dazwischen fügen wir ein Zwischenlayer V_2 ein, dass aus Knoten besteht, die zulässige Termintupel beschreiben - also je zwei Termine, die mindestens 14 Tage auseinanderliegen. Wir ziehen n_1 Kanten E_1 von den Interessenten V_1 zu den Termintupeln V_2, an denen sie beide Termine wahrnehmen können, und n_2 Kanten von allen Termintupeln V_2 im Zwischenlayer zu den dazugehörigen Einzelterminen in V_3. (1 Punkt)

Die Knotenkanteninzidenzmatrix dieses Graphen hat die Form

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$$

Dabei sind in A_1 die startenden Kanten der Interessenten, in A_2 die endenden Kanten in den Termintupeln, in A_3 die startenden Kanten in den Termintupeln und in A_4 die endenden Kanten in den Einzelterminen kodiert, dabei sind A_1 und A_3 nichtpositiv und A_2 und A_4 nichtnegativ. (1 Punkt)

Wir definieren uns jetzt noch Kopplungsmatrizen, die die Aktivierung von Eingangskanten in die Termintupel mit Ausgangskanten aus den Termintupeln verknüpft, also für jeden Knoten aus dem Zwischenlayer V_2 mit den eingehenden Kanten $e_1, \dots, e_r$ und den ausgehenden Kanten

$\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_s$ darstellt, dass die Summe aller aktivierten eingehenden Kanten gleich der Summe der aktivierten ausgehenden Kanten ist. Es ergeben sich Matrizen K_1 und K_2 bei denen K_1 die Größe $|V_2| \times n_1$ hat und für jeden Knoten in V_2 eine Zeile enthält mit einer 2 an den Indizes der eingehenden Kanten, sowie K_2 mit Größe $|V_2| \times n_2$ und einer -1 an dem Index jeder ausgehenden Kante. Damit formulieren wir das Problem

$$\begin{aligned}
\text{minimiere} \quad & -\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{über } (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^{n_1+n_2} \\
\text{sodass} \quad & \begin{bmatrix} |A_1| & 0 \\ 0 & |A_4| \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{und} \quad & \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\
\text{und} \quad & x \ge 0.
\end{aligned}$$

Die Ganzzahligkeitsbedingung in Verbindung mit den Ungleichungsnebenbedingungen garantiert, dass $x \in \{0,1\}^{n_1+n_2}$, wobei $x = 1$ der Aktivierung der Kante entspricht. Die Ungleichungsnebenbedingungen garantieren dabei, dass nicht mehr als ein Termintupel pro Interessent vergeben wird und kein Einzeltermin doppelt belegt wird. Die Kopplungsmatrizen sorgen dafür, dass wenn ein Termintupel vergeben wird (eine Komponente aus x_1 wird auf 1 gesetzt) auch die jeweiligen Einzeltermine durch Aktivierung der entsprechenden Kanten als vergeben markiert werden.

Die vergebenen Termintupel lassen sich direkt an x_1 ablesen, deren Anzahl wird maximiert. (1 Punkt)

Zusatzaufgabe 8.5 (Sortieren mit LPs) 3 Bonuspunkte

Gegeben sei eine Liste von Elementen (aus einer geordneten Menge), die nach Größe sortiert werden sollen. Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe von gerichteten Graphen ein lineares Programm formulieren kann, anhand dessen Lösung man die geordnete Liste ablesen kann.

Lösung.

Zuerst wird ein gerichteter Graph aufgebaut, dessen Knoten den Elementen der Liste entsprechen. Für alle Paare von Knoten wird eine Kante (v_1, v_2) genau dann eingezogen, wenn $v_1 \le v_2$ ist. Zusätzlich werden ein Startknoten $(-\infty)$, von dem Kanten zu jedem Knoten der Listenelemente gezogen werden, und ein Endknoten (∞), in dem Kanten von jedem Knoten der Listenelemente enden, eingefügt. Nun wird ein entsprechendes kürzeste Wege Problem von $-\infty$ nach ∞ gelöst. Der Lösungsweg liefert die geordnete Reihenfolge der Elemente, dabei garantiert die totale Unimodularität der Inzidenzmatrix die Ganzzahligkeit der Lösung. (3 Punkte)

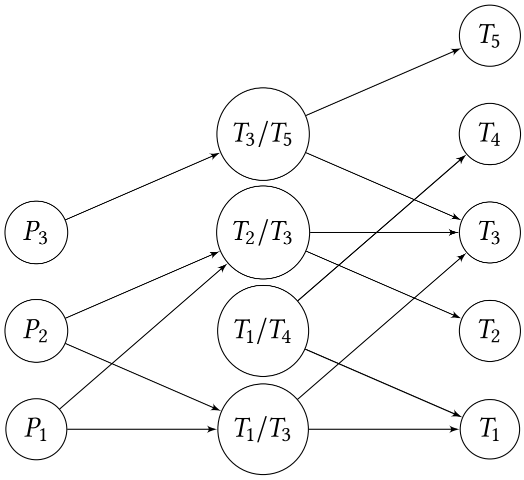

Abbildung 0.2: Gerichteter Graph für das Zuordnungsproblem in Teilaufgabe (c) mit drei Personen P_i, fünf Terminen T_i und vier zulässigen Termintupeln.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.