R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 7

Ausgabedatum: 25. November 2024
Abgabedatum: 2. Dezember 2024

Hausaufgabe 7.1 (Kostensensitivität beim Mozartproblem) 4 + 5 + 2 = 11 Punkte

Wir betrachten noch einmal das Mozartproblem (Beispiel 6.7) aus dem Skript in seiner Normalform:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

mit den Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(Marzipan)} \\ \text{(Nougat)} \\ \text{(Schokolade)} \end{matrix}$$

und der eindeutigen primal optimalen Lösung $x^* = (5, 1, 0, 0, 2)^\top$ zur Basis $B = \{1, 2, 5\}$ mit den dualen Lösungen $\lambda^* = (-7, -1, 0)^\top$ und $\mu^* = (0, 0, 7, 1, 0)^\top$. In Beispiel 10.3 wurde untersucht, welche Auswirkung die Änderung des Offsets der Nebenbedingungen auf die Lösungsstruktur haben. In dieser Aufgabe werden wir untersuchen, welche Auswirkungen die Änderung des Kostenvektors auf die Lösungsstruktur haben.

(a) Bestimmen Sie für jede Wahl $\Delta c \in \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^5$ das maximale Interval, für das die Störung $t\Delta c$ die Lösungsstruktur des Problems nach Satz 10.1 nicht ändert. Entscheiden Sie außerdem, wie die Kostenfunktion entlang der Störung über die Intervallgrenzen hinaus verläuft. Wie lassen sich diese Störungsrichtungen und das Ergebnis interpretieren?

(b) Bestimmen Sie (wie in Punkt (a)) diesmal für jede Wahl $\Delta c \in \{e_4, e_5\} \subseteq \mathbb{R}^5$ das maximale Interval, für das die Störung $t\Delta c$ die Lösungsstruktur des Problems nach Satz 10.1 nicht ändert. Entscheiden Sie außerdem, wie die Kostenfunktion entlang der Störung über die Intervallgrenzen hinaus verläuft. Wie lassen sich diese Störungsrichtungen und das Ergebnis interpretieren? Gibt es Unterschiede, wenn e_4 bzw. e_5 als Störung gewählt wird?

(c) In welchem Verhältnis können wir unsere Preise beliebig anheben, ohne dass wir irgendwann eine andere Lösungsstruktur produzieren müssen?

Hausaufgabe 7.2 (Instabile Lösungen) 4 + 3 = 7 Punkte

(a) Geben Sie ein Beispiel für ein LP in Normalform, einen optimalen Basisvektor und eine Störung Δc an, so dass das Stabilitätsintervall der Lösungsstruktur laut Satz 10.1 nur die Null enthält. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen bei der Konstruktion.

(b) Geben Sie ein Beispiel für ein LP in Normalform, einen optimalen Basisvektor und eine Störung Δb an, so dass das Stabilitätsintervall der Lösungsstruktur laut Satz 10.2 nur die Null enthält. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen bei der Konstruktion.

Hausaufgabe 7.3 (Stabilitätsuntersuchungen bezüglich zusätzlicher Halbraumschnitte) 2 + 2 = 4 Punkte

Gegeben sei ein LP in Normalform mit einem optimalen Basisvektor x^*.

(a) Beschreiben Sie, wie eine weitere Nebenbedingung der Art

$$\tilde{a}^\mathsf{T} x \le \tilde{b}$$

für $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ (ein weiterer Halbraumschnitt) die Lösungsstruktur des Problems beeinflussen kann.

(b) Erklären Sie, warum wir das unten stehende Vorgehen nicht einsetzen können, um die Aussagen des Skripts für eine Sensitivitätsanalyse des Problems hinsichtlich eines neuen Halbraumschnitts zu untersuchen.

(1) Füge einen Halbraumschnitt mit gleicher Normale $\tilde{a}$ an x^* hinzu, also die Bedingung $\tilde{a}^\mathsf{T} x \le \tilde{a}^\mathsf{T} x^*$, sodass das modifizierte Problem die folgende Form erhält:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\mathsf{T} x \quad \text{über } (x, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \text{sodass} \quad & \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{a}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \tilde{a}^\mathsf{T} x^* \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad & x \geqslant 0. \end{aligned}$$

(2) Initialisiere s mit 0, füge $n+1$ zu B hinzu und stelle fest, dass $(x^*, 0)$ weiterhin optimal mit Zielfunktionswert $c^\mathsf{T} x^*$ ist.

(3) Störe die rechte Seite $(b, \tilde{a}^\intercal x^*)^\intercal$ entlang der Richtung $\Delta b = (0, \dots, 0, 1)^\intercal$ um zu untersuchen ob $\tilde{t} = \tilde{b} - \tilde{a}^\intercal x^*$ im Stabilitätsintervall liegt und verwende Satz 10.2 für eine Aussage zu der Änderung des Funktionswerts darüber hinaus.

Zusatzaufgabe 7.4 (Nichtlinearer Einfluss von Störungen in der Matrix) 4 Bonuspunkte

Geben Sie ein Beispiel für ein LP in Normalform an, das zeigt, dass eine Störung der Form $A \mapsto A + t\Delta A$ der Nebenbedingungsmatrix A für ein ΔA so dass $\operatorname{Rang}(A + t\Delta A) = m$ i. A. den optimalen Funktionswert nichtlinear ändern kann. Wie kommt es, dass diese Form der linearen Störung nicht zu linearen Änderungen im Optimalwert führt?

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.