R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 7 (Lösung)

Ausgabedatum: 25. November 2024
Abgabedatum: 2. Dezember 2024

Hausaufgabe 7.1 (Kostensensitivität beim Mozartproblem) 4 + 5 + 2 = 11 Punkte

Wir betrachten noch einmal das Mozartproblem (Beispiel 6.7) aus dem Skript in seiner Normalform:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\intercal x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

mit den Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(Marzipan)} \\ \text{(Nougat)} \\ \text{(Schokolade)} \end{matrix}$$

und der eindeutigen primal optimalen Lösung $x^* = (5, 1, 0, 0, 2)^\intercal$ zur Basis $B = \{1, 2, 5\}$ mit den dualen Lösungen $\lambda^* = (-7, -1, 0)^\intercal$ und $\mu^* = (0, 0, 7, 1, 0)^\intercal$. In Beispiel 10.3 wurde untersucht, welche Auswirkung die Änderung des Offsets der Nebenbedingungen auf die Lösungsstruktur haben. In dieser Aufgabe werden wir untersuchen, welche Auswirkungen die Änderung des Kostenvektors auf die Lösungsstruktur haben.

(a) Bestimmen Sie für jede Wahl $\Delta c \in \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^5$ das maximale Interval, für das die Störung $t\Delta c$ die Lösungsstruktur des Problems nach Satz 10.1 nicht ändert. Entscheiden Sie außerdem, wie die Kostenfunktion entlang der Störung über die Intervallgrenzen hinaus verläuft. Wie lassen sich diese Störungsrichtungen und das Ergebnis interpretieren?

(b) Bestimmen Sie (wie in Punkt (a)) diesmal für jede Wahl $\Delta c \in \{e_4, e_5\} \subseteq \mathbb{R}^5$ das maximale Interval, für das die Störung $t\Delta c$ die Lösungsstruktur des Problems nach Satz 10.1 nicht ändert. Entscheiden Sie außerdem, wie die Kostenfunktion entlang der Störung über die Intervallgrenzen hinaus verläuft. Wie lassen sich diese Störungsrichtungen und das Ergebnis interpretieren? Gibt es Unterschiede, wenn e_4 bzw. e_5 als Störung gewählt wird?

(c) In welchem Verhältnis können wir unsere Preise beliebig anheben, ohne dass wir irgendwann eine andere Lösungsstruktur produzieren müssen?

Lösung.

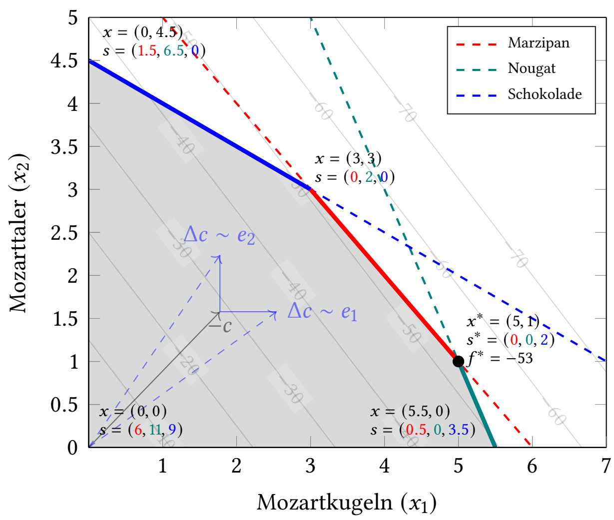


Abbildung 0.1: Ausgangssituation des Mozartproblems in Halbebenenschnittform mit Störungen in Einheitsrichtung für Punkt (a). Punkt (b) nicht darstellbar, weil die Störungen in den Slackvariablen arbeiten.

Da die dualen Slackvariablen nicht entartet sind, wissen wir auf Grund von Satz 10.1 sofort, dass sich der Kostenfunktionalwert in einer Umgebung des Optimierers linear in Δc ändern wird.

Für die Basis B ergeben sich die aufdatierten dualen Variablen aus den Untermatrizen

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{und} \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda^* + t\,\Delta\lambda && \text{mit } \Delta\lambda \coloneqq A_B^{-\top}\Delta c_B \\ \mu_N(t) &= \mu_N^* + t\,\Delta\mu_N && \text{mit } \Delta\mu_N \coloneqq \Delta c_N - A_N^\top \Delta\lambda \\ \mu_B(t) &\equiv \mu_B^* = 0. \end{aligned}$$

(a) Für $\Delta c = (1, 0, 0, 0, 0)^\top$ haben wir $\Delta c_B = (1, 0, 0)^\top$ und $\Delta c_N = (0, 0)^\top$ und damit

$$\Delta\lambda = A_B^{-\top}\Delta c_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\Delta\mu_N = \Delta c_N - A_N^\top \Delta\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1 Punkt)

Damit sich die Lösungstruktur nicht ändert, muss der Störungsparameter der folgenden Bedingung genügen:

$$\sup_{\substack{i \in N \\ \Delta\mu_i > 0}} \underbrace{\left\{ -\frac{\mu_i^*}{\Delta\mu_i} \right\}}_{\leqslant 0} \leqslant t \leqslant \inf_{\substack{i \in N \\ \Delta\mu_i < 0}} \underbrace{\left\{ -\frac{\mu_i^*}{\Delta\mu_i} \right\}}_{\geqslant 0}$$

Einsetzen der Werte liefert die Bedingung

$$\max \underbrace{\left\{ -\frac{7}{1} \right\}}_{i=3} \leqslant t \leqslant \min \underbrace{\left\{ -\frac{1}{-1} \right\}}_{i=4}$$

und damit das Stabilitätsintervall $[-7, 1]$. (1 Punkt)

Für $\Delta c = (0, 1, 0, 0, 0)^\top$ haben wir $\Delta c_B = (0, 1, 0)^\top$ und $\Delta c_N = (0, 0)^\top$ und damit

$$\Delta\lambda = A_B^{-\top}\Delta c_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\Delta\mu_N = \Delta c_N - A_N^\top \Delta\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Bedingung

$$\max \underbrace{\left\{ -\frac{1}{1} \right\}}_{i=4} \leqslant t \leqslant \min \underbrace{\left\{ -\frac{7}{-2} \right\}}_{i=3}$$

und damit das Stabilitätsinterval $[-1, \frac{7}{2}]$. (1 Punkt)

Die Einheitsvektoren 1 und 2 gehören zu "echten" Variablen, nicht zu den Slacks. Der Vektor c zeigt im Bild nach links unten mit orthogonal dazu stehenden Isolinien. In der 2-d Anschauung dreht (und streckt) eine Störung $\Delta c \in \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^5$ den Vektor und seine Isolinien, wobei der resultierende Kostenvektor $c + t\Delta c$ für beliebige t alle Richtungen aus dem offenen unteren Halbraum bzw. dem offenen linken Halbraum abdecken kann. Diese Drehungen sind jetzt soweit strukturerhaltend, bis die Isolinien parallel zu den beiden aktiven Nebenbedingungen (mit Slackindizes 3 und 4 , also Marzipan und Nougat) stehen. Die Nebenbedingungsgraden haben Steigung -1 und -2, was man für die Isolinien genau erhält, wenn man für die Störungen te_1, te_2 mit t an die jeweils zugehörigen Stabilitätsintervallgrenzen geht.

In den jeweiligen Intervallgrenzen wird jeweils eine der anderen Ecken (Marzipan/Schoko bzw. Nougat/Positivität von x_2) ebenfalls optimal, in denen wir dann auch wieder durch Sensitivitätsuntersuchungen eine Aussage über das größtmögliche Störungsintervall treffen können. Auf Grund der Nichtentartung kann man an dem Index im dualen Slack, der Null wird, auch direkt ablesen, welche Nebenbedingungen rausgetauscht werden muss. In allen Fällen ist die Lösung stückweise konstant (und springt in den Intervallgrenzen), der optimale Funktionswert aber ist stückweise linear in t. Interpretieren lässt sich das natürlich so, dass die Gewinnmargen für die zwei Produkte angepasst werden. (1 Punkt)

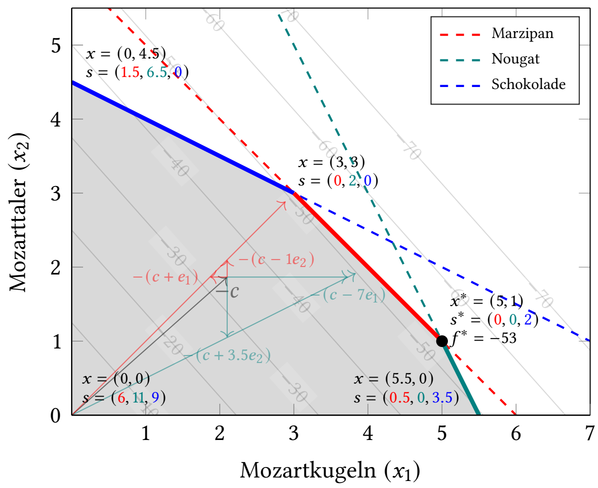


Abbildung 0.2: Stabilitätsvisualisierung des Mozartproblems in Halbebenenschnittform mit Störungen des Kostenvektors in Einheitsrichtung für Punkt (a). Störungen Δc entlang e_1 sind stabil im Interval $[-7, 1]$ und entlang e_2 stabil im Interval $[-1, 3.5]$. Am Ende jedes Stabilitätsintervals ist der gestörte Kostenvektor so ausgerichtet, dass die Höhenlinien der Zielfunktion parallel zu einer der Nebenbedingungen, die x^* im ursprünglichen Problem definieren, sind und alle Punkte auf dem beschränkenden Teil der Kante sind optimal. Über die Intervallenden hinaus springt der Optimierer aus x^* in die jeweils andere Ecke der jeweiligen Kante.

(b) Für $\Delta c = (0, 0, 0, 1, 0)^\mathsf{T}$ haben wir $\Delta c_B = (0, 0, 0)^\mathsf{T}$ und $\Delta c_N = (0, 1)^\mathsf{T}$, und damit

$$\Delta\lambda = A_B^{-\mathsf{T}} \Delta c_B = 0$$

sowie

$$\Delta\mu_N = \Delta c_N - A_N^\mathsf{T} \Delta\lambda = \Delta c_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

Damit ergibt sich die Bedingung

$$\max \underbrace{\left\{ -\frac{1}{1} \right\}}_{i=4} \leqslant t$$

und damit das Stabilitätsinterval $[-1, \infty)$. (1 Punkt)

Für $\Delta c = (0, 0, 0, 0, 1)^\mathsf{T}$ haben wir $\Delta c_B = (0, 0, 1)^\mathsf{T}$ und $\Delta c_N = (0, 0)^\mathsf{T}$, und damit

$$\Delta\lambda = A_B^{-\mathsf{T}} \Delta c_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\Delta\mu_N = \Delta c_N - A_N^\mathsf{T} \Delta\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

Damit ergibt sich die Bedingung

$$\max \underbrace{\left\{ -\frac{7}{3} \right\}}_{i=2} \leqslant t \leqslant \min \underbrace{\left\{ -\frac{1}{-1} \right\}}_{i=4}$$

und damit das Stabilitätsinterval $[-\frac{7}{3}, 1]$. (1 Punkt)

Die Störungen $\Delta c \in \{e_4, e_5\}$ gehören zu den zugefügten Slackvariablen der Nougat- und Schokoladennebenbedingung. In der 2-d Anschauung dreht (und streckt) eine Störung $\Delta c \in \{e_4, e_5\} \subseteq \mathbb{R}^5$ den Vektor und seine Isolinien, wobei der resultierende Kostenvektor $c + t\Delta x$ für beliebige t alle Richtungen aus den offenen Halbräumen, deren begrenzende Hyperebenen orthogonal zu der Nougat- bzw. Schokoladennebenbedingung stehen, abdecken kann (die Isolinien werden also gerade nicht parallel zu den Nebenbedingunshyperebenen).

Die beiden Richtungen unterscheiden sich nun untereinander (und von den Richtungen in Punkt (a)) insofern, als dass e_4 zu einer aktiven Nebenbedingung gehört. In die Richtung, in der die Störung die Isolinien der Kostenfunktion (orientierungsstabil) parallel zu der Nougatnebenbedingung ausrichtet, ändert sich die Lösung garnicht (das Stabilitätsinterval ist in dieser Richtung also unbeschränkt). In die orientierungsinstabile Richtung, ist die Störung strukturerhaltend, bis die Isolinien irgendwann parallel zur Marzipannebenbedingung sind. Die Ecke Marzipan/Schokolade wird dann ebenfalls optimal und bleibt von da an vorerst auch optimal. Der Fall e_5 unterscheidet sich von den Fällen in Punkt (a) nicht sonderlich.

Dass den Slackvariablen eine Kostenkomponente zugewiesen wird kann so interpretiert werden, dass für verbleibende Zutaten entweder Strafe gezahlt werden muss (Lagerkosten) oder zusätzlicher Gewinn erzeugt werden kann (Weiterverkauf des Rests). Ist z.B. im Fall der aktiven Nebenbedingung e_4 schon nichts mehr an Nougat übrig, dann interessieren uns Strafkosten nicht (der halboffene Bereich des Intervalls), wenn aber überbleibendes Nougat noch gewinnbringend verwendet werden kann, dann macht es ab einem gewissen Wiederverkaufspreis doch Sinn, eine andere Lösung zu produzieren und die Reste weiterverkaufen. Diesen Preis kann man an der Stabilitätsintervallgrenze ablesen – er liegt bei -1. (1 Punkt)

(c) Wir setzen die Störung $\Delta c = (c_1, c_2, 0, 0, 0)^\top$ an. Dann berechnen sich

$$\Delta\lambda = A_B^{-\top}\Delta c_B \quad = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,c_2 - c_1 \\ c_1 - c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\Delta\mu_N = \Delta c_N - A_N^\top \Delta\lambda \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\,c_2 - c_1 \\ c_1 - c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 2\,c_2 \\ c_2 - c_1 \end{pmatrix}.$$

Damit die rechtsseitige Grenze des Stabilitätsintervals unendlich ist, muss $\Delta\mu_N$ überall nichtnegativ sein wir erhalten also die Bedingungen

$$c_1 \geq 2c_2 \quad \text{und} \quad c_2 \geq c_1$$

(1 Punkt)

woran man sofort auch die Negativität von c_1, c_2 sowie die maximalen Verhältnisse 1 zu 2 und 1 zu 1 ablesen kann. Das sind genau die Steigungen der beiden Nebenbedingungen, die an dem Optimierer aktiv sind. Alle Verhältnisse zwischen den beiden Extremfällen genügen der Anforderung ebenfalls. (1 Punkt)

Hausaufgabe 7.2 (Instabile Lösungen) 4 + 3 = 7 Punkte

(a) Geben Sie ein Beispiel für ein LP in Normalform, einen optimalen Basisvektor und eine Störung Δc an, so dass das Stabilitätsintervall der Lösungsstruktur laut Satz 10.1 nur die Null enthält. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen bei der Konstruktion.

(b) Geben Sie ein Beispiel für ein LP in Normalform, einen optimalen Basisvektor und eine Störung Δb an, so dass das Stabilitätsintervall der Lösungsstruktur laut Satz 10.2 nur die Null enthält. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen bei der Konstruktion.

Lösung.

(a) Das Stabilitätsintervall enthält genau dann nur die 0, wenn in der Ungleichungskette

$$\sup_{\substack{i\in N\\ \Delta\mu_i>0}} \underbrace{\left\{-\frac{\mu_i^*}{\Delta\mu_i}\right\}}_{\leqslant 0} \leqslant t \leqslant \inf_{\substack{i\in N\\ \Delta\mu_i<0}} \underbrace{\left\{-\frac{\mu_i^*}{\Delta\mu_i}\right\}}_{\geqslant 0}$$

beide Beschränkungen 0 sind. Damit dieser Fall eintreten kann, muss also unser Problem und unsere Störung Δc derart gestaltet sein, dass die optimale duale Slackvariable s^* mindestens zwei Nulleinträge in dem Indexbereich N hat, also doppelt entartet ist, und $\Delta\mu_i$ an den jeweiligen Einträgen einen positiven und einen negativen Eintrag hat.

Damit s^* doppelt entartet sein kann benötigen wir mindestens 2 Indizes in der Nichtbasis. Damit die Basis nicht leer ist benötigen wir mindestens einen weiteren Index, den wir dort reinstecken können. Das Problem muss also mindestens 3 Variablen haben. (1 Punkt)

In dem Fall von 3 Variablen muss dann die duale Schlupfvariable komplett 0 sein (eine strukturbedingte Null für die Basiskomponente und zwei degenerierte Nichtbasis-Nullen) und damit muss der reduzierte Kostenvektor an der Lösung entlang der beiden freien Koordinatenrichtungen auch 0 sein. Wir wählen also der Einfachheit halber ein Kostenfunktional, das auf der zulässigen Menge konstant ist, beispielsweise $c = (0, 0, 0)^\intercal$ und das einfachste dreidimensionale Normalformpolyeder – das geslackte Standardsimplex im R^2. (1 Punkt)

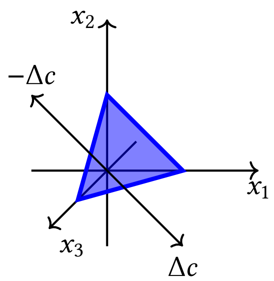
Unser Beispiel hat also die Struktur

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 0 \quad \text{über } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \text{und} \quad & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Alle zulässigen Punkte sind natürlich optimal, die optimalen Ecken entsprechen genau den Einheitsvektoren. Wir untersuchen die Ecke $x^* = (1, 0, 0)$, zur Basis $B = \{1\}$ mit den dualen Slacks, die tatsächlich wegen $s_B^* = 0$ und $s_N^* = \underbrace{c_N}_{0} - A_N^\top A_B^{-\top} \underbrace{c_B}_{0} = 0$ auch komplett 0 sind, wie wir es oben gebastelt haben. Die dualen Slacks sind also in jedem Eintrag von der Nichtbasis $\{2, 3\}$ degeneriert. Jetzt gilt es also noch eine Störung Δc zu wählen, so dass $\Delta \mu_N = \Delta c_N - A_N^\top A_B^{-\top} \Delta c_B$ zwei verschiedene Vorzeichen hat. Wir setzen $\Delta c_B = 0$ und $\Delta c_N = (1, -1)^\top$ so dass $\Delta \mu_N = (1, -1)^\top$ genau zwei entgegengesetzte Vorzeichen hat und damit das Stabilitätsintervall nur die Null enthält. (1 Punkt)

Wir starten also bei einem Problem, wo alle Ecken optimal sind. Ändern wir den Kostenvektor nun leicht auf eine Art und Weise, die die jeweils anderen Ecken günstiger macht als den bisherigen Punkt, so springt die Lösung sofort von unserer bisherigen optimalen Ecke in eine der beiden anderen. Interessant zu sehen ist, dass der Sprung in eine der anderen Ecken zwar sofort für $t > 0$ oder $t < 0$ stattfindet, aber solang t dann das Vorzeichen behält, kann t beliebig gewählt werden, ohne dass sich die optimale Ecke ändert und zwar mit Optimalwert $\Psi(t) = -t$. Der Optimalwert ändert sich also global stetig identisch zu $-t$, in $t = 0$ ist aber wegen der dualen Entartung (Nulldurchgang der reduzierten Kosten in diesem Fall) keine Aussage möglich, wie er sich entwickeln dürfte. Wir haben unsere Untersuchung für die einzige Ecke durchgeführt, die in keinem der beiden Fälle optimal bleibt. Die gleiche Untersuchung an einer der beiden anderen Ecken hätte zumindest ein rechts/linksseitiges Intervall um $t = 0$ ergeben.



(b) Das Stabilitätsintervall enthält genau dann nur die 0, wenn in der Ungleichungskette

$$\underbrace{\sup_{\substack{i \in B \\ \Delta x_i > 0}} \left\{ -\frac{x_i^*}{\Delta x_i} \right\}}_{\leqslant 0} \leqslant t \leqslant \underbrace{\inf_{\substack{i \in B \\ \Delta x_i < 0}} \left\{ -\frac{x_i^*}{\Delta x_i} \right\}}_{\geqslant 0}$$

beide Beschränkungen 0 sind. Damit dieser Fall eintreten kann, muss also unser Problem und unsere Störung Δb derart gestaltet sein, dass die optimale primale Variable x^* mindestens zwei Nulleinträge in dem Indexbereich B hat, also doppelt entartet ist, und Δx_i an den jeweiligen Einträgen einen positiven und einen negativen Eintrag hat.

Damit x^* doppelt entartet sein kann benötigen wir mindestens 2 Indizes in der Basis. Damit die Nichtbasis nicht leer ist benötigen wir mindestens einen weiteren Index, den wir dort reinstecken können. Das Problem muss also mindestens 3 Variablen haben und sollte damit höchstens 2 Nebenbedingungen haben. Damit der Optimierer in beiden Einträgen zu den Basisindizes degeneriert, muss er also schon komplett $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ sein. (1 Punkt)

Wir können also als zwei Nebenbedingungen bspw. $x_2 = x_3 = 0$ fordern und über x_1 optimieren, das ergibt dann das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & x_1 \quad \text{über } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & x_2 = 0 \\ & x_3 = 0 \\ \text{und} \quad & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

mit dem eindeutigen Minimierer $x^* = (0,0,0)$, der nur die Basiswahl $B = \{2,3\}$ zulässt. Damit ist $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und somit $\Delta x_B = A_B^{-1} \Delta b = \Delta b$ und wir können, um die Vorzeichenanforderungen in Δx_B zu erfüllen, bspw. $\Delta b = (1,-1)^\intercal$ wählen. Das Intervall enthält dann nur die 0, für andere t wird unser Basisvektor sofort unzulässig und die zulässige Menge sogar leer. (1 Punkt)

Die hier gewählte Störung legt die Koordinaten der Basiseinträge von dem neuen Optimierer für $t \neq 0$ in mindestens einer Komponente auf einen negativen Wert, was sofort eine leere zulässige Menge produziert.

Hausaufgabe 7.3 (Stabilitätsuntersuchungen bezüglich zusätzlicher Halbraumschnitte) 2 + 2 = 4 Punkte

Gegeben sei ein LP in Normalform mit einem optimalen Basisvektor x^*.

(a) Beschreiben Sie, wie eine weitere Nebenbedingung der Art

$$\tilde{a}^\intercal x \le \tilde{b}$$

für $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ (ein weiterer Halbraumschnitt) die Lösungsstruktur des Problems beeinflussen kann.

(b) Erklären Sie, warum wir das unten stehende Vorgehen nicht einsetzen können, um die Aussagen des Skripts für eine Sensitivitätsanalyse des Problems hinsichtlich eines neuen Halbraumschnitts zu untersuchen.

  (1) Füge einen Halbraumschnitt mit gleicher Normale $\tilde{a}$ an x^* hinzu, also die Bedingung $\tilde{a}^\intercal x \le \tilde{a}^\intercal x^*$, sodass das modifizierte Problem die folgende Form erhält:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & c^\mathsf{T} x \quad \text{über } (x,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \\
\text{sodass} \quad & \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{a}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \tilde{a}^\mathsf{T} x^* \end{pmatrix} \\
\text{und} \quad & x \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

(2) Initialisiere s mit 0, füge $n+1$ zu B hinzu und stelle fest, dass $(x^*, 0)$ weiterhin optimal mit Zielfunktionswert $c^\mathsf{T} x^*$ ist.

(3) Störe die rechte Seite $(b, \tilde{a}^\mathsf{T} x^*)^\mathsf{T}$ entlang der Richtung $\Delta b = (0, \dots, 0, 1)^\mathsf{T}$ um zu untersuchen ob $\tilde{t} = \tilde{b} - \tilde{a}^\mathsf{T} x^*$ im Stabilitätsintervall liegt und verwende Satz 10.2 für eine Aussage zu der Änderung des Funktionswerts darüber hinaus.

Lösung.

(a) Ob ein weiterer Halbraumschnitt Auswirkungen auf die Lösungsstruktur hat hängt maßgeblich davon ab, ob der Basisvektor weiterhin zulässig bleibt oder nicht. Ein Halbraumschnitt verkleinert die zulässige Menge natürlich nur. Ist x^* zuvor optimal gewesen und erfüllt die zusätzliche Bedingung, so ist x^* natürlich auch weiterhin optimal und der Funktionswert ändert sich nicht. Anderenfalls kann die neue zulässige Menge leer sein oder noch andere Elemente als x^* enthalten, insbesondere andere Optimierer. Hier können beispielsweise Bifurkationen auftreten, wo sich die Basisindizes aufsplitten und wo sich die Funktionalwerte der neuen Ecken entlang der jeweiligen Äste mit unterschiedlichen Raten ändern.

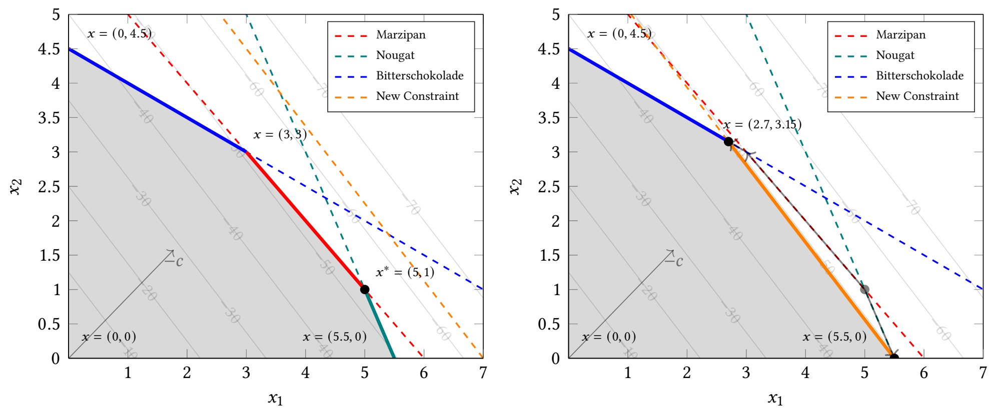


Abbildung 0.3: Zusätzlicher Halbraumschnitt (orange) in der Halbraumschnittform des Mozartproblems parallel zu den Höhenlinien der Zielfunktion, so dass immer eine ganze Kante optimal ist, wenn der Halbraumschnitt die zulässige Menge in mehr als einem Punkt begrenzt. Zulässig Punkt müssen links unterhalb der orangen Strichlinie liegen. Wird der Halbraumschnitt so weit außen angesetzt, dass die zulässige Menge nicht beschränkt wird, dann ist das Problem unverändert (links). Wird die aktive Menge der Nebenbedingung, also der Schnitt des Halbraums, nach links unten geschoben, dann degeneriert der Optimierer des ursprünglichen Problems ($x^* = (5, 1)$) wenn der Halbraum die zulässige Menge an x^* berührt. Wird die neue Nebenbedingung weiter nach links unten geschoben, dann splittet sich der ursprüngliche Optimierer in zwei, welche Nougat sowie erst die marzipan und dann die Schokoladenbedingung entlang wandern bis das rechts gezeigte Bild entsteht.

(2 Punkte)

(b) Gehen wir so vor wie beschrieben, dann ist $(x^*, 0)$ zwar weiterhin optimal aber in der letzten Komponente degeneriert, denn die neue Slackvariable musste als Basisvariable aufgenommen werden. Unser Störungsvektor Δb hat aber exakt dort den einzigen Nichtnulleintrag. Die eindeutige Lösung von

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{a}^\top & 1 \end{pmatrix}_{B\cup\{n+1\}} (\Delta x, \Delta s)_{B\cup\{n+1\}} = \begin{pmatrix} A_B & 0 \\ \tilde{a}_B^\top & 1 \end{pmatrix} (\Delta x_B, \Delta s) = \Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist also $(\Delta x, \Delta s)_{B\cup\{n+1\}} = (0, \dots, 0, 1)^\top$. Entsprechend der Stabilitätsintervallberechnung

$$\sup_{\substack{i\in B\cup\{n+1\} \\ (\Delta x, \Delta s)_i > 0}} \underbrace{\left\{ -\frac{(x^*, 0)_i}{(\Delta x, \Delta s)_i} \right\}}_{\leqslant 0} \leqslant t \leqslant \inf_{\substack{i\in B\cup\{n+1\} \\ (\Delta x, \Delta s)_i < 0}} \underbrace{\left\{ -\frac{(x^*, 0)_i}{(\Delta x, \Delta s)_i} \right\}}_{\geqslant 0}$$

ist also die obere Schranke immer $+\infty$ während die untere Schranke immer Null sein wird.

Unsere Sensitivitätsanalyse liefert uns also nur die Information, dass wir die an x^* angelegte Hyperebene gern so verschieben dürfen, dass x^* weiter zulässig bleibt, das war aber auch vorher schon klar. In die Richtung, die x^* genau abschneidet, kriegen wir keine Informationen.

Ob wir für $\tilde{t} = \tilde{b} - \tilde{a}^\top x^*$ eine Aussage kriegen hängt also von dem Vorzeichen ab – für positive $\tilde{t}$ wissen wir, was passiert. Das ist aber genau der Fall, wo die Hyperebene x^* nicht abgeschnitten hat. Den interessanteren Fall kriegen wir so nicht abgedeckt. Das liegt daran, dass sich in einer degenerierten Ecke zu viele Nebenbedingungen treffen. Wenn wir jetzt genau an der Verschiebung einer solchen Hyperebene interessiert sind, dann können genau die oben erwähnten Bifurkationen für die neuen primalen Optimierer auftreten. Wenn man zwei unterschiedlichen Kanten folgt, können also unterschiedliche lineare Änderungen im Kostenfunktional auftreten. Das kann unsere Analyse nicht abdecken.

(2 Punkte)

Zusatzaufgabe 7.4 (Nichtlinearer Einfluss von Störungen in der Matrix) 4 Bonuspunkte

Geben Sie ein Beispiel für ein LP in Normalform an, das zeigt, dass eine Störung der Form $A \mapsto A + t\Delta A$ der Nebenbedingungsmatrix A für ein ΔA so dass $\operatorname{Rang}(A + t\Delta A) = m$ i. A. den optimalen Funktionswert nichtlinear ändern kann. Wie kommt es, dass diese Form der linearen Störung nicht zu linearen Änderungen im Optimalwert führt?

Lösung.

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} - x_1 \quad & \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & (1,1)x = 1 \\ \text{und} \quad & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $x^* = (1, 0)$ zur Basis $B = \{1\}$.

Mit der Störung $\Delta A = (1, 0)$ ergibt sich die Gesamtmatrix des gestörten Problems als

$$A + t\Delta A = (1 + t, 1) \quad \text{mit} \quad (A_B + t\Delta A_B)^{-1} = \frac{1}{1 + t},$$

sodass die eindeutige Lösung des gestörten Problems durch $x^*(t) = (\frac{1}{1+t}, 0)$ mit Funktionswert $\frac{1}{1+t}$ gegeben ist. (3 Punkte) Der Kern des Problems liegt darin, dass die Invertierung von Matrizen nicht linear in linearen Störungen der Matrix ist. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.