Übung 6

Ausgabedatum: 18. November 2024
Abgabedatum: 25. November 2024

Hausaufgabe 6.1 (Duale LPs für verschiedene Beispiele) 4 + 6 = 10 Punkte

(a) Gegeben sei ein primal-duales Paar von LPs mit primalem Problem in Normalform. Zeigen Sie, dass das duale Problem zu dem dualen Problem aus dem Paar äquivalent zu dem primalen Problem des Paars ist.

(b) Zeigen Sie, dass sich die folgenden Paare von LPs für $m \le n$ als primal-duale Paare auffassen lassen.

(i)

$$\begin{cases} \text{maximiere} & c^\top x & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax \le b & \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} & x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{minimiere} & b^\top \lambda & \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} & A^\top \lambda \ge c & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \text{und} & \lambda \ge 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} \text{minimiere} & c^\top x & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax \geqslant b & \text{in } \mathbb{R}^m \\ & & \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{maximiere} & b^\top \lambda & \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} & A^\top \lambda = c & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \text{und} & \lambda \ge 0 \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} \text{maximiere} & c^\top x \\ \text{über} & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax = b \text{ in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} & \ell \leqslant x \leqslant u \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{minimiere} & (A\ell - b)^\top \lambda_1 + (u - \ell)^\top \lambda_2 + c^\top \ell \\ \text{über} & (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \text{sodass} & A^\top \lambda_1 - \lambda_2 \le -c \text{ in } \mathbb{R}^n \\ \text{und} & \lambda_2 \ge 0 \end{cases}$$

Hinweis: Starten Sie immer mit einer Formulierung in Normalform.

Hausaufgabe 6.2 ("Selbstduale LPs") 4 + 3 = 7 Punkte

Wir betrachten ein lineares Problem in kanonischer Form, also für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ das Problem

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & Ax \leq b \\ \text{und} \quad & x \geq 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Falls $A = -A^\top$ und $b = c$ ist, dann ist das zugehörige duale Problem äquivalent zu dem ursprünglichen Problem.

(b) In der Situation von Punkt (a) ist entweder der Optimalwert Null oder das Problem ist unzulässig.

Hausaufgabe 6.3 ((Un-)zulässige und (un-)beschränkte primal-duale Paare) 3 + 3 = 6 Punkte

(a) Geben Sie ein primal-duales Paar von LPs an, in dem beide Probleme unzulässig sind (vgl. Satz 8.9, Fall (II)).

(b) Geben Sie ein primal-duales Paar von LPs an, bei dem das primale zulässig und unbeschränkt und das duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.9, Fall (III)).

Zusatzaufgabe 6.4 (Bestimmung von zulässigen Punkten/Lösungen ist "gleich schwer".) 4 Bonuspunkte

Gegeben sei ein LP ein Normalform

$$\begin{cases} \text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \quad\text{sodass} \quad Ax = b \\ \quad\text{und} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{P}$$

für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, und die beiden Aufgabenstellungen:

(a) Finde einen zulässigen Punkt von (P) oder stelle fest, dass keiner existiert.

(b) Finde eine Lösung von (P) oder stelle fest, dass keine existiert.

Zeigen Sie, dass ein Algorithmus, der eine der beiden Aufgabenstellungen löst, auch für die Lösung der jeweils anderen Aufgabenstellung verwendet werden kann.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.