Übung 6 (Lösung)

Ausgabedatum: 18. November 2024
Abgabedatum: 25. November 2024

Hausaufgabe 6.1 (Duale LPs für verschiedene Beispiele) 4 + 6 = 10 Punkte

(a) Gegeben sei ein primal-duales Paar von LPs mit primalem Problem in Normalform. Zeigen Sie, dass das duale Problem zu dem dualen Problem aus dem Paar äquivalent zu dem primalen Problem des Paars ist.

(b) Zeigen Sie, dass sich die folgenden Paare von LPs für $m \le n$ als primal-duale Paare auffassen lassen.

(i)

$$\begin{cases} \text{maximiere} & c^\top x & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax \le b & \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} & x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{minimiere} & b^\top \lambda & \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} & A^\top \lambda \ge c & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \text{und} & \lambda \ge 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} \text{minimiere} & c^\top x & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax \geqslant b & \text{in } \mathbb{R}^m \\ & & \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{maximiere} & b^\top \lambda & \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} & A^\top \lambda = c & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \text{und} & \lambda \ge 0 \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} \text{maximiere} & c^\top x \\ \text{über} & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax = b \text{ in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} & \ell \leqslant x \leqslant u \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{minimiere} & (A\ell - b)^\top \lambda_1 + (u - \ell)^\top \lambda_2 + c^\top \ell \\ \text{über} & (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \text{sodass} & A^\top \lambda_1 - \lambda_2 \le -c \text{ in } \mathbb{R}^n \\ \text{und} & \lambda_2 \ge 0 \end{cases}$$

Hinweis: Starten Sie immer mit einer Formulierung in Normalform.

Lösung.

(a) Gegeben seien also die Daten $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und das primal-duale Paar von LPs

$$\begin{cases} \text{minimiere} & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax = b \\ \text{und} & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \text{maximiere} & b^\top \lambda \quad \text{über } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \text{sodass} & A^\top \lambda + \mu = c \\ \text{und} & \mu \geq 0. \end{cases}$$

Dann ist die zu dem dualen Problem äquivalente Formulierung in Normalform durch

$$\begin{cases} \text{minimiere} & -b^\top \lambda^+ + b^\top \lambda^- \quad \text{über } (\lambda^+, \lambda^-, \mu) \in \mathbb{R}^{2m+n} \\ \text{sodass} & [A^\top, -A^\top, \mathrm{Id}_n] \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \\ \mu \end{pmatrix} = c \\ \text{und} & (\lambda^+, \lambda^-, \mu) \geq 0. \end{cases}$$

gegeben. (1.5 Punkte)

Das zu dem dualen Problem in Normalform gegebene duale Problem (ohne Slackvariablen) ist gegeben durch

$$\begin{cases} \text{maximiere} & c^\top z \quad \text{über } z \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & \begin{bmatrix} A \\ -A \\ \mathrm{Id}_n \end{bmatrix} z \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

(1.5 Punkte)

Identifiziert man nun z mit $-x$, dann ergibt sich direkt wieder die primale Aufgabe

$$\begin{cases} \text{minimiere} & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax = b \\ \text{und} & x \geq 0. \end{cases}$$

(1 Punkt)

(b) Zuerstmal stellen wir fest, dass wir nur eines der beiden Probleme in Normalform überführen und dann zeigen müssen, dass das dazugehörige duale Problem die Form der Aufgabenstellung hat, denn der Rückweg ergibt sich aus dem ersten Aufgabenteil.

(i) Das Problem

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c^\top x && \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax \leq b && \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

hat die äquivalente Normalformdarstellung

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & -c^\top x && \text{über } (x,s) \in \mathbb{R}^{n+m} \\ \text{sodass} \quad & [A, \mathrm{Id}_m] \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b && \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} \quad & x, s \geq 0 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

mit dem zugehörigen dualen Problem

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & -b^\top \lambda && \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & \begin{bmatrix} A^\top \\ \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} \lambda \leq \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} && \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun λ mit $-\lambda$, dann erhält man direkt die Form des rechten Problems. (1 Punkt)

(ii) Das Problem

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & c^\top x && \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax \geqslant b && \text{in } \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

hat die äquivalente Normalformdarstellung

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & c^\top x^+ - c^\top x^- && \text{über } (x^+, x^-, s) \in \mathbb{R}^{2n+m} \\ \text{sodass} \quad & [A, -A, -\mathrm{Id}_m] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ s \end{pmatrix} = b && \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} \quad & (x^+, x^-, s) \geq 0 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

mit dem zugehörigen dualen Problem

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & b^\top \lambda && \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & \begin{bmatrix} A^\top \\ -A^\top \\ \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} \lambda \leq \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} && \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Kombiniert man nun die ersten beiden Ungleichungssysteme zu dem Gleichungssystem $A^\top \lambda = c$, erhält man direkt die Form des rechten Problems. (1 Punkt)

(iii) In dem Problem

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c^\top x && \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b && \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} \quad & \ell \leq x \leq u \end{aligned}$$

können wir die translatierte Variable $\tilde{x} = x - l$ betrachten und damit die äquivalente Normalformdarstellung

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & -c^\mathsf{T}\tilde{x} - c^\mathsf{T}\ell && \text{über } (\tilde{x}, s) \in \mathbb{R}^{2n} \\ \text{sodass} \quad & \begin{bmatrix} A & 0 \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - A\ell \\ u - \ell \end{pmatrix} && \text{in } \mathbb{R}^{m+n} \\ \text{und} \quad & (\tilde{x}, s) \geq 0 \end{aligned}$$

erhalten. (1 Punkt)

Das dazugehörige duale Problem ergibt sich als

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & (b - A\ell)^\mathsf{T}\lambda_1 + (u - l)^\mathsf{T}\lambda_2 - c^\mathsf{T}\ell && \text{über } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \text{sodass} \quad & \begin{bmatrix} A^\mathsf{T} & \mathrm{Id}_n \\ 0 & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} && \text{in } \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned}$$

Identifiziert man λ_2 mit $-\lambda_2$, dann erhält man direkt die Form des rechten Problems. (1 Punkt)

Hausaufgabe 6.2 ("Selbstduale LPs") 4 + 3 = 7 Punkte

Wir betrachten ein lineares Problem in kanonischer Form, also für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ das Problem

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & c^\mathsf{T}x \\ \text{sodass} \quad & Ax \leq b \\ \text{und} \quad & x \geq 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Falls $A = -A^\mathsf{T}$ und $b = c$ ist, dann ist das zugehörige duale Problem äquivalent zu dem ursprünglichen Problem.

(b) In der Situation von Punkt (a) ist entweder der Optimalwert Null oder das Problem ist unzulässig.

Lösung.

(a) Das Problem

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & c^\mathsf{T}x && \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax \leq b && \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

hat die äquivalente Normalformdarstellung

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & c^\top x && \text{über } (x,s) \in \mathbb{R}^{n+m} \\ \text{sodass} \quad & [A, \mathrm{Id}_m] \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b && \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} \quad & x, s \geq 0 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

mit dem zugehörigen dualen Problem

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & b^\top \lambda && \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & \begin{bmatrix} A^\top \\ \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} \lambda \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} && \text{in } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

welches wegen der Form der Daten *gleich* dem Problem

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c^\top \lambda && \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & \begin{bmatrix} -A \\ \mathrm{Id}_m \end{bmatrix} \lambda \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} && \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ist. (2 Punkte)

Identifiziert man nun λ mit $-x$, dann erhält man direkt die Form des Ursprungsproblems, nämlich

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & c^\top x && \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax \leq b && \text{in } \mathbb{R}^m \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

. (1 Punkt)

(b) Zwischen den zulässigen Mengen des primalen und dualen Problems besteht also über die Abbildung $x = -\lambda$ eine Bijektion. Ist eines der beiden Probleme unzulässig, dann ist es natürlich das andere auch. (1 Punkt)

Ist eines der beiden Probleme unbeschränkt, bspw. $c^\top x^{(n)} \to -\infty$, dann ist für $\lambda^{(n)} = -x^{(n)}$ natürlich auch $c^\top \lambda_n = -c^\top x^{(n)} \to \infty$ im Widerspruch zur schwachen Dualität, dieser Fall kann also nicht auftreten.

Die Probleme müssen bei Zulässigkeit also beide beschränkt und damit lösbar sein und die Optimalwerte sind gleich.

In diesem Fall bezeichnen wir je einen primalen und dualen Minimierer mit x^* und λ^*. Dann sind $-x^*$ und $-\lambda^*$ dual respektive primal zulässig. Auf Grund der schwachen Dualität und der Gleichheit $b = c$ gilt dann

$$c^\top(-x^*) \leq c^\top \lambda^* = c^\top x^* \leq c^\top(-\lambda^*)$$

woraus wir $c^\top x^* \geqslant 0$ und $c^\top \lambda^* \leqslant 0$ folgern können und da beide den gleichen Wert haben muss dieser Null sein. (2 Punkte)

Hausaufgabe 6.3 ((Un-)zulässige und (un-)beschränkte primal-duale Paare) 3 + 3 = 6 Punkte

(a) Geben Sie ein primal-duales Paar von LPs an, in dem beide Probleme unzulässig sind (vgl. Satz 8.9, Fall (II)).

(b) Geben Sie ein primal-duales Paar von LPs an, bei dem das primale zulässig und unbeschränkt und das duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.9, Fall (III)).

Lösung.

(a) Das LP

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & (-1,-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & (1,0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \\ \text{und} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ist unzulässig (siehe erste Komponente der Gleichungsnebenbedingung).

Das zugehörige duale LP lautet

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & -\lambda \qquad \text{über } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{sodass} \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad & s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

und es ist ebenfalls unzulässig (siehe zweite Komponente der Gleichungsnebenbedingung). (3 Punkte)

Beachte: Der Trick beim Bauen solcher Beispiele ist, dass man, um das primale Problem unzulässig zu machen, nur A und b setzen muss. Um dann das duale Problem unzulässig zu machen, hat man noch den Vektor c, den man quasi nachträglich setzen kann. Der Vektor b hat dann im dualen Probleme keine Bedeutung mehr für die Zulässigkeit. Wenn man noch zusätzlich sieht, dass eine Komponenten x_i, die im primalen Problem nicht mit in die Beschränkungen aufgenommen wird, im dualen Problem immer dafür sorgt, dass die dazugehörige Slackvariable

s_i allein das c_i ergeben muss, dann kann man mit dem c die Vorzeichenbedingung der Slacks verletzen.

(b) Das LP

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & (-1,-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & (1,0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \\ \text{und} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ist unbeschränkt.

Das zugehörige duale LP lautet

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & \lambda \quad \text{über } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{sodass} \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad & s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

und es ist unzulässig. (3 Punkte)

Beachte: Wie oben konnten wir die Unzulässigkeit des dualen Problems erreichen, indem wir eine Komponente x_i nicht in die Nebenbedingungen mit einbeziehen und die Komponenten c_i negativ wählen. Da x_i dann frei ist und der Wert im Kostenvektor negativ, ist das primale Problem entsprechend unbeschränkt.

Zusatzaufgabe 6.4 (Bestimmung von zulässigen Punkten/Lösungen ist "gleich schwer".) 4 Bonuspunkte

Gegeben sei ein LP ein Normalform

$$\begin{cases} \text{Minimiere} \quad c^\mathsf{T} x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \quad \text{sodass} \quad Ax = b \\ \quad \text{und} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{P}$$

für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, und die beiden Aufgabenstellungen:

(a) Finde einen zulässigen Punkt von (P) oder stelle fest, dass keiner existiert.

(b) Finde eine Lösung von (P) oder stelle fest, dass keine existiert.

Zeigen Sie, dass ein Algorithmus, der eine der beiden Aufgabenstellungen löst, auch für die Lösung der jeweils anderen Aufgabenstellung verwendet werden kann.

Lösung.

Angenommen, wir haben einen Algorithmus für Punkt (a). Dann wenden wir den Algorithmus auf die äquivalente Normalform des Problems

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 0 \quad \text{über } (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m+n} \\ & Ax = b \\ \text{sodass} \quad & A^\top \lambda + \mu = c \\ & c^\top x = b^\top \lambda \\ \text{und} \quad & (x, \mu) \geqslant 0 \end{aligned}$$

an. Dieses Problem hat genau dann einen zulässigen Punkt, wenn (P) einen Optimierer hat. Wegen Folgerung 8.5 ist ein zulässiger Punkt des Problems primal-dual optimal. Wenn hingegen ein primal-dualer Optimierer existiert, dann erfüllt dieser nach Satz 8.6 die notwendigen Optimalitätsbedingungen, ist also insbesondere primal und dual zulässig und hat keine Dualitätslücke (zusätzlich wissen wir noch, dass x und μ komplementär sind). Der Algorithmus gibt uns also direkt eine Aussage zur Existenz von Optimierern. Statt der Bedingung $c^\top x = b^\top \lambda$ kann natürlich nicht einfach die Bedingung $x^\top \mu = 0$ in die Nebenbedingung des Hilfts-LP aufgenommen werden, denn diese Bedingung ist nichtlinear - es ist also ausschlaggebend, dass hier die Dualitätslücke verwendet wird. (2 Punkte)

Angenommen, wir haben einen Algorithmus für Teil (b). Dann wenden wir den Algorithmus auf das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 0 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \geqslant 0. \end{aligned}$$

an. Liefert er eine optimale Lösung, so wissen wir, dass das modifizierte Problem und damit auch Gleichung (P) einen zulässigen Punkt haben. Anderenfalls kann das modifizierte Problem nicht unbeschränkt sein, es bleibt also nur die Unzulässigkeit beider Probleme. (2 Punkte)

Eine Alternative Lösung wäre, den Algorithmus auf das Phase-I Problem, das wir aus dem Simplex kennen, anzuwenden und anschließend die Komponenten von der Lösung in den virtuellen Variablen zu untersuchen.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.