Übung 5

Ausgabedatum: 11. November 2024
Abgabedatum: 18. November 2024

Hausaufgabe 5.1 (Zusammenhang von Ecken/Extremalpunkten und zulässigen Basisvektoren) 5 Punkte

Es sei P wie in (6.8) ein Polyeder in Normalform, und es gelte $\operatorname{Rang}(A) = m$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Ecke/ein Extremalpunkt von P.

(b) $x \in \mathbb{R}^n$ ist zulässiger Basisvektor von P.

(c) es existiert ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$, sodass $x \in \mathbb{R}^n$ die einzige Optimallösung des Problems

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } c^\top x \quad & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass } Ax &= b \\ \text{und } x &\geq 0 \end{aligned}$$

ist.

Beachte: Die Äquivalenz von Aussagen (a) und (b) ist genau die Aussage von Satz 6.19 aus dem Skript.

Hausaufgabe 5.2 (“Steilster Abstieg” in der Indexwahl im Simplex-Algorithmus) 4 Punkte

Der Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6) lässt einige Freiheit in der Wahl der Indizes, welche in die Basis aufgenommen werden sollen (Zeile 6) bzw. in die Nichtbasis aufgenommen werden sollen

(Zeile 11). Für den Index, der in die Basis aufgenommen werden soll, ist eine Möglichkeit bspw. die Regel des steilsten Abstiegs, welche

$$r \coloneqq \min(\arg\min\{\widetilde{c}_i \mid i \in N\}) \tag{$*$}$$

verwendet.

Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Wahl ($*$) nicht zum bestmöglichen Abstieg im Kostenfunktionalwert führen muss.

Hausaufgabe 5.3 (Post-Processing der Simplexphase I) 7 Punkte

Gegeben sei ein lineares Programm in Normalform (Gleichung (6.6)), für das o. B. d. A. $b \geq 0$ ist. Um das Optimierungsproblem mit dem Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6) lösen zu können, benötigt man eine Anfangsbasis zu einem zulässigen Basisvektor. Wenn $\operatorname{Rang} A = m$ ist und das Problem zulässig ist, dann kann ein solcher zulässiger Basisvektor durch Lösen des linearen Hilfsproblems (**Phase-I-Problem**)

$$\left.\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \mathbf{1}^\top z \quad \text{über } (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & Ax + z = b \\ \text{und} \quad & x \geqslant 0, \quad z \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{Gleichung (7.7)}$$

mit $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ mit dem Simplex-Algorithmus bestimmt werden, siehe Satz 7.10. Ist der berechnete optimale Basisvektor $(x^*, 0)^\top$ des Hilfsproblems nicht entartet, dann kann die dazugehörige Basis B^* sofort als Anfangsbasis für die Lösung des Ursprungsproblems verwendet werden. Andernfalls kann die Basis B^* noch Indizes in $\{n+1, \dots, n+m\}$ enthalten und muss daher modifiziert werden. Wie das geht, sehen wir hier.

Es seien $\operatorname{Rang} A = m$ und ein entarteter optimaler Basisvektor des Phase-I-Problems $(x^*, z^*)^\top$ mit $z^* = 0$ zur Basis B^* gegeben. Weiter sei $\ell \in \{n+1, \dots, n+m\} \cap B^*$.

(a) Zeigen Sie, dass ein Index $r \in \{1, \dots, n\} \setminus B^*$ existiert, sodass für den durch $[A, \mathrm{Id}_m]_{B^*} d_{B^*} = a_r$ definierten Vektor d die Aussage $d_\ell \neq 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $(x^*, 0)^\top$ für jeden Index r, der die Eigenschaft aus Punkt (a) besitzt, ebenfalls ein Basisvektor zur Indexmenge $B^+ \coloneqq (B^* \cup \{r\}) \setminus \{\ell\}$ ist.

(c) Beschreiben Sie, wie Sie einen Index r, der die Eigenschaft aus Punkt (a) besitzt, praktisch bestimmen können und wie Sie mit diesem Vorgehen aus einem optimalen Basis nach der Phase-I-Optimierung eine Anfangsbasis für die Optimierung des Ursprungsproblems generieren können.

Zusatzaufgabe 5.4 (Zyklen im Simplex-Verfahren haben mindestens die Länge 3) 10 Bonuspunkte

Zeigen Sie, dass ein im Simplex-Verfahren soeben aus der Basis entfernter Index im nächsten Simplex-Schritt nicht sofort wieder in die Basis aufgenommen werden wird.

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Vektor der reduzierten Kosten im betreffenden Eintrag positiv sein wird. Verwenden Sie dazu die Cramersche Regel.

Zusatzaufgabe 5.5 (Implementierung eines Simplexverfahrens) 15 Bonuspunkte

Bearbeiten Sie `P2_Simplexverfahren.ipynb`.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.