R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 4

Ausgabedatum: 4. November 2024
Abgabedatum: 11. November 2024

Hausaufgabe 4.1 (Überführen auf Normalform) 4 Punkte

Gegeben sei die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & -2\,x_1 - 3\,x_2 - 4\,x_3 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ & 3\,x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ & x_1 \leqslant 2 \\ & x_3 \leqslant 3. \end{aligned}$$

Überführen Sie das lineare Optimierungsproblem in ein äquivalentes Problem in Normalform.

Hausaufgabe 4.2 (Beziehungen zwischen den Polyederdarstellungen) 2 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 + 2 = 12 Punkte

In dieser Aufgabe untersuchen wir, in welchem Sinne ein beliebiges LP „äquivalent" zu einem LP in kanonischer Form ist (Lemma 6.3). Gegeben seien dafür eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren die drei von uns verwendeten Mengendarstellungen

$$P_{\text{HS}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} \quad \text{(Halbebenenschnitte)}$$

$$P_{\text{CF}} \coloneqq \left\{ (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; [A, -A] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \le b,\ (x^+, x^-) \ge 0 \right\} \quad \text{(Kanonische Form)}$$

$$P_{\text{NF}} \coloneqq \left\{ (x^+, x^-, s) \in \mathbb{R}^{2\,n+m} \;\middle|\; [A, -A, \mathrm{Id}_m] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ s \end{pmatrix} = b,\ (x^+, x^-, s) \ge 0 \right\} \quad \text{(Normalform)}$$

und damit die dazugehörigen linearen Programme

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & x \in P, \end{aligned} \tag{LP$_{\text{HS}}$}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\top x^+ - c^\top x^- \quad \text{über } (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n} \\ \text{sodass} \quad & (x^+, x^-) \in P_{\text{CF}}, \end{aligned} \tag{LP$_{\text{CF}}$}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\top x^+ - c^\top x^- \quad \text{über } (x^+, x^-, s) \in \mathbb{R}^{2n+m} \\ \text{sodass} \quad & (x^+, x^-, s) \in P_{\text{NF}}. \end{aligned} \tag{LP$_{\text{NF}}$}$$

Weiterhin fixieren wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} T_{\text{HS}}^{\text{CF}} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}, & T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(x) &\coloneqq (\max(x,0), \max(-x,0)), \\ T_{\text{CF}}^{\text{HS}} &: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, & T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(x^+, x^-) &\coloneqq x^+ - x^-, \\ T_{\text{CF}}^{\text{NF}} &: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+m}, & T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(x^+, x^-) &\coloneqq \left(x^+, x^-, b - [A, -A] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}\right), \\ T_{\text{NF}}^{\text{CF}} &: \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}^{2n}, & T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(x^+, x^-, s) &\coloneqq (x^+, x^-), \end{aligned} \tag{0.1}$$

welche die Polyederdarstellungen aufeinander abbilden sollen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Abbildung $T_{\text{HS}}^{\text{CF}}$ ist injektiv und die Abbildung $T_{\text{CF}}^{\text{HS}}$ ist nicht injektiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} T_{\text{CF}}^{\text{HS}}\left(T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(x)\right) &= x \\ {T_{\text{CF}}^{\text{HS}}}^{-1}(\{x\}) &= T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(x) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Die Abbildung $T_{\text{CF}}^{\text{NF}}$ und die Einschränkung der Abbildung $T_{\text{NF}}^{\text{CF}}$ auf P_{NF} sind injektiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(x^+, x^-)) &= (x^+, x^-) & &\text{für alle } (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n}, \\ T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(x^+, x^-, s)) &= (x^+, x^-, s) & &\text{für alle } (x^+, x^-, s) \in P_{\text{NF}}. \end{aligned}$$

(c) $P_{\text{CF}} = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(P_{\text{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\}$ und $P_{\text{HS}} = T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(P_{\text{CF}})$.

(d) $T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(P_{\text{CF}}) = P_{\text{NF}}$ und $T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(P_{\text{NF}}) = P_{\text{CF}}$.

Wir bezeichnen weiterhin die Mengen der Optimierer der jeweiligen Polyeder P_{HS}, P_{CF} und P_{NF} mit O_{HS}, O_{CF} respektive O_{NF}.

(e) Zeigen Sie, dass $O_{\text{CF}} = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(O_{\text{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\}$ und $O_{\text{HS}} = T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(O_{\text{CF}})$.

(f) Zeigen Sie, dass $O_{\text{NF}} = T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(O_{\text{CF}})$ und $O_{\text{CF}} = T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(O_{\text{NF}})$.

(g) Schreiben Sie eine kurze Erklärung, in welchem Sinn die jeweiligen Probleme (LP_{HS}), (LP_{CF}) und (LP_{NF}) „äquivalent“ sind.

Hausaufgabe 4.3 (Innerste Punkte eines Polyeders) 3 + 2 + 1 + 1 = 7 Punkte

Es sei ein Polyeder P mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ und $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ durch

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\mathsf{T} x \leqslant b_i, \;\; i = 1, \dots, m\}$$

beschrieben. Für jeden Punkt $x \in P$ untersuchen wir den größtmöglichen Radius $r(x)$, so dass die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius $r(x)$ noch vollständig im Polyeder P liegt. Ein Maximierer von $r(x)$ über P heißt **Tschebyschow-Zentrum** oder **innerster Punkt** von P. Ein solcher Punkt hat also den größtmöglichen Abstand zu den Seitenflächen des Polyeders.

(a) Formulieren Sie die Aufgabe, ein Tschebyschow-Zentrum des Polyeders P zu finden, als ein lineares Optimierungsproblem in Normalform.

(b) Zeigen Sie, dass jedes beschränkte, nichtleere Polyeder ein Tschebyschow-Zentrum mit endlichem Kugelradius besitzt.

(c) Geben Sie ein Polyeder an, das unendlich viele Tschebyschow-Zentren mit endlichem Kugelradius besitzt.

(d) Geben Sie ein nichtleeres Polyeder an, das kein Tschebyschow-Zentrum besitzt.

Zusatzaufgabe 4.4 (Diskrete Tschebyschow-Approximation) 6 Bonuspunkte

Zu einer gegebenen Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ soll ein Polynom $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n$ vom Höchstgrad n so bestimmt werden, dass der maximale Abstand zur Funktion f in den Punkten $t_i \in [a, b]$ für $i = 1, \dots, m$ minimal wird. Es soll also das Problem

$$\text{Minimiere} \quad \max_{i=1,\dots,m} |p(t_i) - f(t_i)| \quad \text{über } (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

gelöst werden. Formulieren Sie die Aufgabe als lineares Programm in Normalform.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.