R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 4 (Lösung)

Ausgabedatum: 4. November 2024
Abgabedatum: 11. November 2024

Hausaufgabe 4.1 (Überführen auf Normalform) 4 Punkte

Gegeben sei die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & -2\,x_1 - 3\,x_2 - 4\,x_3 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ & 3\,x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ & x_1 \leqslant 2 \\ & x_3 \leqslant 3. \end{aligned}$$

Überführen Sie das lineare Optimierungsproblem in ein äquivalentes Problem in Normalform.

Lösung.

Zuerst ersetzen wir $x_1 = -\tilde{x}_1 + 2$ und $x_3 = -\tilde{x}_3 + 3$. (Alternativ kann man alle Variablen hier schon aufspalten, aber erhält zusätzliche Variablen.) Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -2\,\tilde{x}_1 + 3\,x_2 - 4\,\tilde{x}_3 + 16 \quad \text{über } \tilde{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & -\tilde{x}_1 + x_2 - \tilde{x}_3 \leqslant -1 \\ & 3\,x_2 - \tilde{x}_3 \leqslant 3 \\ \text{und} \quad & \tilde{x}_1, \tilde{x}_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Nun spalten wir $x_2 = \tilde{x}_2^+ - \tilde{x}_2^-$ und erhalten

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -2\,\tilde{x}_1 + 3\,\tilde{x}_2^+ - 3\,\tilde{x}_2^- - 4\,\tilde{x}_3 + 16 \quad \text{über } \tilde{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2^+ - \tilde{x}_2^- - \tilde{x}_3 \leqslant -1 \\ & 3\,\tilde{x}_2^+ - 3\,\tilde{x}_2^- - \tilde{x}_3 \leqslant 3 \\ \text{und} \quad & \tilde{x}_1, \tilde{x}_2^+, \tilde{x}_2^-, \tilde{x}_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Mit den Slack-Variablen s_1, s_2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -2\,\tilde{x}_1 + 3\,\tilde{x}_2^+ - 3\,\tilde{x}_2^- - 4\,\tilde{x}_3 + 16 \quad \text{über } (\tilde{x}, s) \in \mathbb{R}^{4+2} \\ \text{sodass} \quad & -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2^+ - \tilde{x}_2^- - \tilde{x}_3 + s_1 = -1 \\ & 3\,\tilde{x}_2^+ - 3\,\tilde{x}_2^- - \tilde{x}_3 + s_2 = 3 \\ \text{und} \quad & \tilde{x}_1, \tilde{x}_2^+, \tilde{x}_2^-, \tilde{x}_3 \geqslant 0 \\ & s_1, s_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Für die Normalform aus der Vorlesung verzichtet man nun nur noch auf die +16 im Zielfunktional. (1 Punkt)

Ohne den Trick, die beiden leichten Ungleichungen direkt für die Einführung der Variablen $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_3$ zu verwenden sondern bei direkter Anwendung der Variablensplits und anschließendes Einführen von Slackvariablen kommt man über analoge Rechnungen zu dem folgenden Ergebnis (mit notwendigerweise 4 zusätzlichen Variablen)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 2x_1^+ - 2\,x_1^- + 3\,x_2^+ - 3\,x_2^- + 4\,x_3^+ - 4\,x_3^- \quad \text{über } (x, s) \in \mathbb{R}^{6+4} \\ \text{sodass} \quad & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- + x_3 - x_3 + s_1 = 4 \\ & 3\,x_2^+ - 3\,x_2^- + x_3^+ - x_3^- + s_2 = 6 \\ & x_1^+ - x_1^- + s_3 = 2 \\ & x_3^+ - x_3^- + s_4 = 3 \\ \text{und} \quad & x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^- \geqslant 0 \\ & s_1, s_2, s_3, s_4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 4.2 (Beziehungen zwischen den Polyederdarstellungen) 2 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 + 2 = 12 Punkte

In dieser Aufgabe untersuchen wir, in welchem Sinne ein beliebiges LP „äquivalent“ zu einem LP in kanonischer Form ist (Lemma 6.3). Gegeben seien dafür eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren die drei von uns verwendeten Mengendarstellungen

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{HS}} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} \quad \text{(Halbebenenschnitte)} \\
P_{\mathrm{CF}} &:= \left\{ (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n} \,\middle|\, [A, -A] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \le b,\ (x^+, x^-) \ge 0 \right\} \quad \text{(Kanonische Form)} \\
P_{\mathrm{NF}} &:= \left\{ (x^+, x^-, s) \in \mathbb{R}^{2\,n+m} \,\middle|\, [A, -A, \mathrm{Id}_m] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ s \end{pmatrix} = b,\ (x^+, x^-, s) \ge 0 \right\} \quad \text{(Normalform)}
\end{aligned}
$$

und damit die dazugehörigen linearen Programme

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & c^\intercal x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\
\text{sodass} \quad & x \in P,
\end{aligned}
\tag{LP$_{\mathrm{HS}}$}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & c^\intercal x^+ - c^\intercal x^- \quad \text{über } (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n} \\
\text{sodass} \quad & (x^+, x^-) \in P_{\mathrm{CF}},
\end{aligned}
\tag{LP$_{\mathrm{CF}}$}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & c^\intercal x^+ - c^\intercal x^- \quad \text{über } (x^+, x^-, s) \in \mathbb{R}^{2n+m} \\
\text{sodass} \quad & (x^+, x^-, s) \in P_{\mathrm{NF}}.
\end{aligned}
\tag{LP$_{\mathrm{NF}}$}
$$

Weiterhin fixieren wir die Abbildungen

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}, & T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}(x) &:= (\max(x, 0), \max(-x, 0)), \\
T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}} &: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, & T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}(x^+, x^-) &:= x^+ - x^-, \\
T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{NF}} &: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+m}, & T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{NF}}(x^+, x^-) &:= \left(x^+, x^-, b - [A, -A] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \right), \\
T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}} &: \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}^{2n}, & T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}}(x^+, x^-, s) &:= (x^+, x^-),
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

welche die Polyederdarstellungen aufeinander abbilden sollen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Abbildung $T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}$ ist injektiv und die Abbildung $T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}$ ist nicht injektiv, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}\left(T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}(x)\right) &= x \\
{T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}}^{-1}(\{x\}) &= T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}(x) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \in \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Die Abbildung $T_{\text{CF}}^{\text{NF}}$ und die Einschränkung der Abbildung $T_{\text{NF}}^{\text{CF}}$ auf P_{NF} sind injektiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(x^+, x^-)) &= (x^+, x^-) \qquad \text{für alle } (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n}, \\ T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(x^+, x^-, s)) &= (x^+, x^-, s) \quad \text{für alle } (x^+, x^-, s) \in P_{\text{NF}}. \end{aligned}$$

(c) $P_{\text{CF}} = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(P_{\text{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\}$ und $P_{\text{HS}} = T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(P_{\text{CF}})$.

(d) $T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(P_{\text{CF}}) = P_{\text{NF}}$ und $T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(P_{\text{NF}}) = P_{\text{CF}}$.

Wir bezeichnen weiterhin die Mengen der Optimierer der jeweiligen Polyeder P_{HS}, P_{CF} und P_{NF} mit O_{HS}, O_{CF} respektive O_{NF}.

(e) Zeigen Sie, dass $O_{\text{CF}} = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(O_{\text{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\}$ und $O_{\text{HS}} = T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(O_{\text{CF}})$.

(f) Zeigen Sie, dass $O_{\text{NF}} = T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(O_{\text{CF}})$ und $O_{\text{CF}} = T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(O_{\text{NF}})$.

(g) Schreiben Sie eine kurze Erklärung, in welchem Sinn die jeweiligen Probleme (LP_{HS}), (LP_{CF}) und (LP_{NF}) „äquivalent“ sind.

Lösung.

(a) Wir sehen sofort, dass

$$T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(x)) = \max(x, 0) - \max(-x, 0) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildung $T_{\text{HS}}^{\text{CF}}$ hat also eine Linksinverse und ist damit injektiv. (1 Punkt)

Damit gilt dann auch

$$T_{\text{CF}}^{\text{HS}^{-1}}(\{x\}) = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(x) + \ker(T_{\text{CF}}^{\text{HS}}) = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(x) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{0.2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. (1 Punkt)

(b) Wieder sehen wir sofort, dass

$$T_{\text{NF}}^{\text{CF}}\left(T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(x^+, x^-)\right) = T_{\text{NF}}^{\text{CF}}\left(\left(x^+, x^-, b - [A, -A]\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}\right)\right) = (x^+, x^-) \text{ für alle } (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Die Abbildung $T_{\text{CF}}^{\text{NF}}$ hat also eine Linksinverse und ist damit injektiv. (1 Punkt)

Genau so sieht man wieder, dass

$$T_{\text{NF}}^{\text{CF}^{-1}}\{(x^+, x^-)\} = (x^+, x^-) \times \mathbb{R}^m$$

und damit sofort, dass $T_{\text{CF}}^{\text{NF}}$ i. A. nicht injektiv ist, aber als Einschränkung auf P_{NF} doch injektiv ist. (1 Punkt)

(c) Nach Konstruktion sind $T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(P_{\text{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\} \subseteq P_{\text{CF}}$ und $T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(P_{\text{CF}}) \subseteq P_{\text{HS}}$. (1 Punkt)

Da $T_{\text{CF}}^{\text{HS}}$ die Linksinverse von $T_{\text{HS}}^{\text{CF}}$ ist, ist damit natürlich auch $P_{\text{HS}} \subseteq T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(P_{\text{CF}})$. (1 Punkt)

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$P_{\text{CF}} \subseteq T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(P_{\text{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\}.$$

Aus (0.2) erhalten wir direkt, dass für $(x^+, x^-) \in P_{\text{CF}}$ ein $\delta x \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$(x^+, x^-) = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}\Big(\underbrace{T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(x^+, x^-)}_{\in P_{\text{HS}}}\Big) + (\delta x, \delta x)$$

und da für $T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(x^+, x^-)) = \big(\max\big(T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(x^+, x^-), 0\big), \max\big(-T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(x^+, x^-), 0\big)\big)$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ immer mindestens eine der Komponenten $k, n+k$ Null ist, muss $\delta x \geq 0$ sein, damit (x^+, x^-) nichtnegativ und damit zulässig sein kann. (1 Punkt)

(d) Die Inklusionen

$$T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(P_{\text{CF}}) \subseteq P_{\text{NF}}$$
$$T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(P_{\text{NF}}) \subseteq P_{\text{CF}}$$

folgen sofort nach Konstruktion der Abbildungen und die verbleibenden Inklusionen sind eine direkte Folgerung der Inverseneigenschaft aus Aussage (b). (1 Punkt)

(e) Auf Grund von Aussage (c) wissen wir, dass $P_{\text{CF}} = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(P_{\text{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\}$. Da außerdem

$$c^\top x = c^\top \max(x, 0) - c^\top \max(-x, 0) = (c^\top, -c^\top) T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(x) = (c^\top, -c^\top)(T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(x) + (\delta x, \delta x))$$

für alle $x \in P_{\text{HS}}$ und $\delta x \geq 0$ ist, haben alle Punkte in P_{CF} den Funktionswert ihres dazugehörigen (Ur-)bildpunkts $T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(x^+, x^-)$, die Mininimierereigenschaft folgt also eindeutig aus den Eigenschaften des Urbildpunkts. (1 Punkt)

(f) Per Definition hängen die Funktionswerte von den Punkten in P_{NF} nur von den Komponenten der Anteile in P_{CF} ab und auf Grund der Bijektivität der Mengen ist die Minimierereigenschaft in beiden Mengen äquivalent. (1 Punkt)

(g) In Aussage (a) haben wir herausgefunden, wie der Kern der „Rekombinationsabbildung“ $T_{\text{CF}}^{\text{HS}}$ aussieht. Aussage (b) zeigt, dass der Kern von $T_{\text{NF}}^{\text{CF}}$ auf P_{NF} keine Probleme machen dürfte. Aus Aussage (c) folgt, dass P_{CF} genau aus den Bildern von P_{HS} unter der Splitabbildung jeweils ergänzt um den gesamten Kern von $T_{\text{CF}}^{\text{HS}}$ besteht. Weiterhin zeigt Aussage (d), dass P_{CF} und P_{NF} von unseren Abbildungen bijektiv ineinander überführt werden. Wegen Aussage (e) wissen wir dann, dass bei der Transformation von LP_{HS} zu LP_{CF} Optimierer hinzukommen werden. Bei Rücktransformation erhalten wir allerdings aus jedem der Optimierer aus der kanonischen Form einen Optimierer des ursprünglichen Problems. Schließlich zeigt Aussage (f), dass die Optimierer von LP_{CF} und LP_{NF} bijektiv ineinander abgebildet werden.

Wir sehen also: Die Normalform und die kanonische Form sind wirklich komplett gleichwertig. Zulässige sowie optimale Punkte werden bijektiv ineinander überführt (für Ecken gilt das im übrigen auch). Bei der Transformation von der Halbebenenschnittform in kanonische Form können wir immer Punkte aus einer der Polyedermengen in die jeweils andere Menge abbilden, eindeutig ist das aber nicht mehr. Außerdem kommen Optimierer bei der Transformation in kanonische Form dazu. (2 Punkte)

Hausaufgabe 4.3 (Innerste Punkte eines Polyeders) 3 + 2 + 1 + 1 = 7 Punkte

Es sei ein Polyeder P mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ und $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ durch

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x \leqslant b_i,\ \ i = 1, \dots, m\}$$

beschrieben. Für jeden Punkt $x \in P$ untersuchen wir den größtmöglichen Radius $r(x)$, so dass die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius $r(x)$ noch vollständig im Polyeder P liegt. Ein Maximierer von $r(x)$ über P heißt **Tschebyschow-Zentrum** oder **innerster Punkt** von P. Ein solcher Punkt hat also den größtmöglichen Abstand zu den Seitenflächen des Polyeders.

(a) Formulieren Sie die Aufgabe, ein Tschebyschow-Zentrum des Polyeders P zu finden, als ein lineares Optimierungsproblem in Normalform.

(b) Zeigen Sie, dass jedes beschränkte, nichtleere Polyeder ein Tschebyschow-Zentrum mit endlichem Kugelradius besitzt.

(c) Geben Sie ein Polyeder an, das unendlich viele Tschebyschow-Zentren mit endlichem Kugelradius besitzt.

(d) Geben Sie ein nichtleeres Polyeder an, das kein Tschebyschow-Zentrum besitzt.

Lösung.

(a) Die abgeschlossene Kugel mit Radius r um einen Punkt $x \in P$ liegt genau dann in P, wenn

$$\max_{\tilde{x} \in \overline{B_r(x)}} a_i^\top \tilde{x} = a_i^\top x + \max_{\Delta x \in \overline{B_r(0)}} a_i^\top \Delta x \leqslant b_i.$$

für alle $i = 1, \dots, m$. Wir wissen wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung, dass

$$\max_{\Delta x \in \overline{B_r(0)}} a_i^\top \Delta x \leq \|a_i\| r$$

mit Gleichheit für den Fall $\Delta x = \frac{r}{\|a_i\|} a_i$ (ein ähnliches Argument wurde in der VL verwendet, um die Richtung des steilsten Abstiegs zu bestimmen). Damit liegt die Kugel genau dann in P, wenn $a_i^\top x + \|a_i\| r \le b_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$. (1 Punkt)

Das liefert uns die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad && -r \quad \text{über } x, r \in \mathbb{R}^{n+1} \\ &\text{sodass} && \begin{pmatrix} (\ldots & a_1^\top & \ldots) & \|a_1\| \\ & \vdots & & \\ (\ldots & a_m^\top & \ldots) & \|a_m\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x \\ \vdots \\ r \end{pmatrix} \le b \\ &\text{und} && r \ge 0. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Wir erhalten ein äquivalentes Problem in Normalform durch das Einführen von Slackvariablen und den Split von x in zwei Variablen, welche die Rolle des Positiv- und Negativteils übernehmen:

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad && -r \quad \text{über } x^+, x^-, s, r \in \mathbb{R}^{2n+m+1} \\ &\text{sodass} && \begin{pmatrix} (\ldots & a_1^\top & \ldots) & (\ldots & -a_1^\top & \ldots) & (1 & \ldots & 0) & \|a_1\| \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ (\ldots & a_m^\top & \ldots) & (\ldots & -a_m^\top & \ldots) & (0 & \ldots & 1) & \|a_m\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^+ \\ \vdots \\ x_m^+ \\ x_1^- \\ \vdots \\ x_m^- \\ s_1 \\ \vdots \\ s_m \\ r \end{pmatrix} = b \\ &\text{und} && r, x^+, x^-, s \ge 0. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b) Option 1 (Direkt über den Satz von Weierstraß): Mit den Argumenten aus dem Beweis von Punkt (a) erhalten wir natürlich auch direkt, dass der maximale Radius $r_i(x)$, für den die Kugel $\overline{B_{r_i(x)}(x)}$ im durch (a_i, b_i) beschriebenen Halbraum liegt, durch $r_i(x) = \frac{b_i - a_i^\top x}{\|a_i\|}$ gegeben ist. Damit ist dann der größte Radius $r(x)$, so dass $\overline{B_{r(x)}(x)}$ in P liegt durch

$$r(x) = \min_{i=1,\ldots,m} r_i(x) = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{b_i - a_i^\top x}{\|a_i\|}$$

gegeben, was offensichtlich eine stetige Funktion in x ist. Jedes nichtleere, beschränkte Polyeder in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt. Der Satz von Weierstraß liefert also die Existenz eines Maximierers. (2 Punkte)

Alternativ (Mit einem Skriptresultat): Das Polyeder ist beschränkt, liegt also in einer Kugel um die 0 mit einem Radius R, der eine obere Schranke an den Radius der Kugel um das Tschebyschow-Zentrum gibt. Das lineare Problem aus Punkt (a) ist also beschränkt und zulässig und damit existiert ein Minimierer nach Satz 6.12.

(c) In jedem Quader mit ungleichen Seitenlängen ist der Radius der Tschebyschow-Zentren durch die kürzeste Seitenlänge gegeben und die Menge der Tschebyschow-Zentren ist ein $n-1$ dimensionales Objekt. (1 Punkt)

(d) Jeder Halbraum besitzt kein Tschebyschow-Zentrum, denn die Radien von Kugeln, die noch in P liegen, sind unbeschränkt aber an jedem Punkt endlich. (1 Punkt)

Zusatzaufgabe 4.4 (Diskrete Tschebyschow-Approximation) 6 Bonuspunkte

Zu einer gegebenen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ soll ein Polynom $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n$ vom Höchstgrad n so bestimmt werden, dass der maximale Abstand zur Funktion f in den Punkten $t_i \in [a,b]$ für $i = 1, \ldots, m$ minimal wird. Es soll also das Problem

$$\text{Minimiere} \quad \max_{i=1,\ldots,m} |p(t_i) - f(t_i)| \quad \text{über } (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

gelöst werden. Formulieren Sie die Aufgabe als lineares Programm in Normalform.

Lösung.

Um die Aufgabe als lineares Programm zu formulieren, nutzen wir den schon im Plenum verwendeten Trick, um die Maximumsnorm in ein lineares Problem mit Box-Beschränkungen umzuschreiben und erhalten das Problem

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiere} \quad z \quad \text{über } (\alpha, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \\
&\text{sodass} \quad -\mathbf{1}z \le \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{pmatrix}}_{=:T} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{=:\alpha} - \underbrace{\begin{pmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_m) \end{pmatrix}}_{=:d} \le \mathbf{1}z \\
&\text{und} \quad z \ge 0
\end{aligned}$$

(2 Punkte)

Um das Problem in Normalform zu bringen, schreiben wir die **Box-Beschränkungen** um:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & z \quad \text{über } (\alpha, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \\ \text{sodass} \quad & \begin{pmatrix} T & -\mathbf{1} \\ -T & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ z \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} d \\ -d \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad & z \ge 0. \end{aligned}$$

(2 Punkte)

Wir splitten wieder α in $\alpha^+, \alpha^- \in \mathbb{R}^{2(n+1)+1}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & z \quad \text{über } (\alpha^+, \alpha^-, z) \in \mathbb{R}^{2(n+1)+1} \\ \text{sodass} \quad & \begin{pmatrix} T & -T & -\mathbf{1} \\ -T & T & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^- \\ z \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} d \\ -d \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad & z \ge 0, \alpha^+ \ge 0, \alpha^- \ge 0 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Schließlich führen wir noch Schlupfvariablen $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^m$ ein und erhalten das Problem in Normalform

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & z \quad \text{über } (\alpha^+, \alpha^-, z, s) \\ \text{sodass} \quad & \begin{pmatrix} T & -T & -\mathbf{1} & I & 0 \\ -T & T & -\mathbf{1} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^- \\ z \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -d \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad & z \ge 0,\ \alpha^+ \ge 0,\ \alpha^- \ge 0,\ s_1 \ge 0,\ s_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.