R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 3

Ausgabedatum: 28. Oktober 2024
Abgabedatum: 4. November 2024

Hausaufgabe 3.1 (Stabilität der Q-Konvergenzordnungen bei Normwechsel) 4 + 8 = 12 Punkte

(a) Es seien zwei äquivalente Normen $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass aus der Q-superlinearen bzw. Q-quadratischen Konvergenz einer Folge bzgl. $\|\cdot\|_a$ die Q-superlineare bzw. Q-quadratische Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_b$ folgt.

(b) Erklären Sie, warum die Argumente für den Nachweis der Aussage in Punkt (a) für Q-*lineare* Konvergenz nicht funktionieren, und geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass eine entsprechende Aussage für Q-*lineare* Konvergenz i. A. nicht gilt.

Hausaufgabe 3.2 (Langsame Konvergenz des Newton-Verfahrens zur Nullstellensuche) 6 Punkte

Berechnen Sie ausgehend vom Startpunkt $x^{(0)} = 1$ die Iterierten des Newton-Verfahrens zur Nullstellensuche (Algorithmus 5.1) für die Funktion

$$f(x) = x^2.$$

Zeigen Sie, dass die Iteriertenfolge konvergiert und entscheiden Sie, mit welcher Q-Konvergenzraten die Folge konvergiert. Warum ist das beobachtete Verhalten kein Widerspruch zu Satz 5.7?

Hausaufgabe 3.3 (Affine Invarianz des Newton-Verfahrens) 5 + 4 + 3 = 12 Punkte

Wir wollen die (affine) Invarianz des lokalen Newton-Verfahrens zur Lösung von Gleichungen der Form $F(x) = 0$ mit stetig differenzierbarem $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Algorithmus 5.1) untersuchen.

Es seien dafür $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben, und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine vom Newton-Verfahren zum Startpunkt $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ erzeugte Folge von Iterierten. Zeigen Sie:

(a) Das Newton-Verfahren für die Funktion

$$G\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad G(y) \coloneqq F(Ay + b)$$

zum Startpunkt $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $x^{(0)} = Ay^{(0)} + b$ ist wohldefiniert und für die erzeugte Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Iterierten gilt

$$x^{(k)} = Ay^{(k)} + b.$$

(b) Das Newton-Verfahren für die Funktion

$$H\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad H(y) \coloneqq AF(y)$$

zum Startpunkt $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $x^{(0)} = y^{(0)}$ ist wohldefiniert und für die erzeugte Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Iterierten gilt

$$x^{(k)} = y^{(k)}.$$

(c) Erläutern Sie (intuitiv, nicht notwendigerweise mit Rechnungen oder Beispielen) was wir erwarten können, wenn wir die Transformation in Punkt (b) um eine konstante Verschiebung auf

$$H\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad H(y) \coloneqq AF(y) + b$$

erweitert wird.

Zusatzaufgabe 3.4 (Nichtkonvergenz des lokalen Newton-Verfahrens in der Optimierung) 2 + 3 = 5 Bonuspunkte

Das lokale Newton-Verfahren zur Nullstellensuche (Algorithmus 5.1) kann durch Anwendung auf die notwendigen Bedingungen erster Ordnung zur Minimierung der Funktion $f(x) = \cos(x)$ verwendet werden. Da die zweite Ableitung an den stationären Punkten nicht null ist, wissen wir, dass das Verfahren q-superlinear gegen einen stationären Punkt konvergiert, wenn man nur nah genug an diesem startet. Was schiefgehen kann, wenn man das nicht tut, wollen wir hier untersuchen.

(a) Bestimmen Sie einen Startpunkt $x^{(0)}$, so dass die Folge der Iterationspunkte $x^{(k)}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

(b) Bestimmen Sie einen Startpunkt $x^{(0)}$, sodass die Folge der Iterationspunkte zwischen zwei verschiedenen (nicht optimalen) Punkten alterniert.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.