Übung 1

Ausgabedatum: 14. Oktober 2024
Abgabedatum: 21. Oktober 2024

Hausaufgabe 1.1 (Klassifikation von Optimierungsaufgaben) 2.5 + 2.5 + 2 + 2 + 1.5 + 2 = 12.5 Punkte

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben (i)–(vi),

(a) ob es sich um eine *diskrete* oder *kontinuierliche* Optimierungsaufgabe handelt
(b) ob die Aufgabe unrestringiert oder gleichungs-, ungleichungsbeschränkt oder beides ist,
(c) ob die Aufgabe unzulässig oder unbeschränkt ist oder endlichen Optimalwert hat,
(d) ob die Aufgabe linear oder quadratisch oder keines von beiden ist.

Begründen Sie Ihre Antworten.

(i)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -5x_1 - 7x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 30 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii)

$$\text{Minimiere} \quad \|Ax - b\|^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geqslant n \in \mathbb{N}$ sowie $\|\cdot\|$ die Eulidische Norm.

(iii)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & x_1 + x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \\ \text{und} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -3x_1 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} -x_1^2 - x_2 \leqslant 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 2x_1x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} (x_1+1)^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{2} \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \\ \text{und} \quad & (x_1-1)^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \exp(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_1^2 - x_2^2 \leqslant -18 \\ \text{und} \quad & (x_1-3)(x_1+3) = 0 \end{aligned}$$

Hausaufgabe 1.2 (Stabilität der Minimierereigenschaft bei Konkatenation) 3 + 2 + 6 = 11 Punkte

Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $F \subseteq \mathbb{R}$ und $f(F) = \{f(x) \mid x \in F\}$ die Wertemenge von f über F. Es sei $g\colon W \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Wir betrachten die beiden Aufgaben

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über } x \in F \tag{A1}$$

und

$$\text{Minimiere} \quad g(f(x)) \quad \text{über } x \in F. \tag{A2}$$

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist g auf der Menge $f(F)$ monoton wachsend, dann ist jeder lokale Minimierer von (A1) auch ein lokaler Minimierer von (A2).

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass auf die Monotonie von g in Punkt (a) nicht verzichtet werden kann.

(c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass unter den Voraussetzungen in Punkt (a) die Aufgabe (A2) lokale Minimierer besitzen kann, die keine lokalen Minimierer von (A1) sind. Geben Sie an, wie Sie die Voraussetzung aus Punkt (a) an g verschärfen können, so dass beide Aufgaben genau dieselben lokalen Minimierer besitzen, und beweisen Sie diese Aussage.

Hausaufgabe 1.3 (Untersuchung von Optimalstellen) 6 + 11 = 17 Punkte

Bestimmen Sie für die unten stehenden Minimierungsaufgaben sämtliche stationäre Punkte und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um Extrempunkte handelt und ob diese lokal, global und strikt bzw. nicht strikt sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Minimiere $\quad f(x) \coloneqq 3x^3 + 26x^2 - 12x + 5 \quad$ über $x \in \mathbb{R}$

(b) Minimiere $\quad f(x) \coloneqq x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2 \quad$ über $x = (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$

Zusatzaufgabe 1.4 (Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung sind nicht hinreichend) 3 + 5 + 2 = 10 Bonuspunkte

Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\text{Minimiere} \quad f(x) = \left(x_1 - x_2^2\right)\left(2x_1 - x_2^2\right) = 2x_1^2 - 3x_1x_2^2 + x_2^4 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung im Punkt $(0,0)^\intercal$ erfüllt sind.

(b) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0)^\intercal$ ein lokaler Minimierer der Einschränkung von f auf jede beliebige gerade Linie durch den Ursprung ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0)^\intercal$ *kein* lokaler Minimierer von f ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.