R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 1 (Lösung)

Ausgabedatum: 14. Oktober 2024
Abgabedatum: 21. Oktober 2024

Hausaufgabe 1.1 (Klassifikation von Optimierungsaufgaben) 2.5 + 2.5 + 2 + 2 + 1.5 + 2 = 12.5 Punkte

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben (i)–(vi),

(a) ob es sich um eine *diskrete* oder *kontinuierliche* Optimierungsaufgabe handelt
(b) ob die Aufgabe unrestringiert oder gleichungs-, ungleichungsbeschränkt oder beides ist,
(c) ob die Aufgabe unzulässig oder unbeschränkt ist oder endlichen Optimalwert hat,
(d) ob die Aufgabe linear oder quadratisch oder keines von beiden ist.

Begründen Sie Ihre Antworten.

(i)

$$\text{Minimiere} \quad -5x_1 - 7x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{sodass} \quad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 30 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\text{Minimiere} \quad \|Ax - b\|^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geqslant n \in \mathbb{N}$ sowie $\|\cdot\|$ die Eulidische Norm.

(iii)

$$\text{Minimiere} \quad x_1 + x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{Z}^2$$
$$\text{sodass} \quad \begin{cases} -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$
$$\text{und} \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

(iv)

$$\text{Minimiere} \quad -3x_1 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{sodass} \quad \begin{cases} -x_1^2 - x_2 \leqslant 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

(v)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 2x_1x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} (x_1+1)^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{2} \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \\ \text{und} \quad & (x_1-1)^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \exp(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_1^2 - x_2^2 \leqslant -18 \\ \text{und} \quad & (x_1-3)(x_1+3) = 0 \end{aligned}$$

Lösung.

(a) Die Aufgabe ist kontinuierlich, denn es findet keine Einschränkung der reellen Grundmenge auf ganzzahlige Komponenten statt. (0.5 Punkte)

Außerdem ist die Aufgabe

- ungleichungsrestringiert, denn es sind lediglich Ungleichungen in den Nebenbedingungen zu finden, (0.5 Punkte)
- zulässig (nicht unzulässig), denn bspw. $x = (0, 0) \in F$, (0.5 Punkte)
- unbeschränkt, denn bspw. die Folge $x^{(n)} = (n, n) \in F \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(x^{(n)}) = -12n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, und (0.5 Punkte)
- linear, denn alle Nebenbedingungen und das Kostenfunktional sind (affin) linear. Die Aufgabe kann damit nicht quadratisch sein. (0.5 Punkte)

(b) Die Aufgabe ist kontinuierlich, denn es findet keine Einschränkung der reellen Grundmenge auf ganzzahlige Komponenten statt. (0.5 Punkte)

Außerdem ist die Aufgabe

- unrestringiert, denn es gibt keine Nebenbedingungen für die zulässige Menge, (0.5 Punkte)
- zulässig (nicht unzulässig), denn die zulässige Menge ist der gesamte $\mathbb{R}^m$ (0.5 Punkte)
- beschränkt (nicht unbeschränkt), denn $\|Ax - b\|^2 \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m = F$, womit auch der Optimalwert endlich ist, (0.5 Punkte)
- nichtlinear aber quadratisch, denn die Zielfunktion ist quadratisch und es gibt keine Nebenbedingungen. (0.5 Punkte)

(c) Die Aufgabe ist diskret, denn es findet eine Einschränkung der Grundmenge auf Punkte mit ganzzahligen Komponenten statt. (0.5 Punkte)

Außerdem ist die Aufgabe

- gleichungs- und ungleichungsrestringiert, denn beide Nebenbedingungstypen liegen vor,

(0.5 Punkte)

- zulässig (nicht unzulässig), denn $(1, 1) \in F$, (0.5 Punkte)
- beschränkt (nicht unbeschränkt), denn die Einschränkung in F auf Punkte mit positiven Komponenten bedeutet, dass $f(x) \geq 0$ für all $x \in F$, womit auch der Optimalwert endlich ist, (0.5 Punkte)
- nichtlinear (weder linear noch quadratisch), denn die Nebenbedingungen enthalten quadratische Terme.

(d) Die Aufgabe ist kontinuierlich, denn es findet keine Einschränkung der reellen Grundmenge auf ganzzahlige Komponenten statt. (0.5 Punkte)

Außerdem ist die Aufgabe

- ungleichungsrestringiert, denn nur dieser Nebenbedingungstyp liegt vor, (0.5 Punkte)
- zulässig (nicht unzulässig), denn $(0, 0) \in F$, (0.5 Punkte)
- beschränkt (nicht unbeschränkt), denn $x_1 \in [0, 2]$ laut den Nebenbedingungen, und daher $f(x) \geq -12$, (0.5 Punkte)
- nichtlinear (weder linear noch quadratisch), denn die Nebenbedingungen enthalten quadratische Terme.

(e) Die Aufgabe ist kontinuierlich, denn es findet keine Einschränkung der reellen Grundmenge auf ganzzahlige Komponenten statt. (0.5 Punkte)

Außerdem ist die Aufgabe

- gleichungs- und ungleichungsrestringiert, denn es liegen beide Nebenbedingungstypen vor, (0.5 Punkte)
- unzulässig, denn Subtraktion der Gleichungsnebenbedingung von der ersten Ungleichungsnebenbedingung ergibt $x_1 \leqslant -2$. Das steht im Widerspruch zur letzten Ungleichungsnebenbedingung. **Achtung:** Hier von Beschränktheit oder Unbeschränktheit zu sprechen macht daher keinen Sinn. (0.5 Punkte)
- nichtlinear (weder linear noch quadratisch), denn die Nebenbedingungen enthalten quadratische Terme.

(f) Die Aufgabe ist kontinuierlich gestellt, denn es findet keine Einschränkung der reellen Grundmenge auf ganze Zahlen statt. Die Nebenbedingungen ergeben allerdings für die erste Komponente der Lösung die diskreten Möglichkeiten $x_1 \in \{-3, 3\}$. Damit wird das Problem in seinen Eigenschaften eher gemischt diskret/kontinuierlich. (0.5 Punkte) Außerdem ist die Aufgabe

- gleichungs- und ungleichungsrestringiert, denn es liegen beide Nebenbedingungstypen vor, (0.5 Punkte)
- zulässig (nicht unzulässig), denn $(3, 3) \in F$, (0.5 Punkte)

- beschränkt (nicht unbeschränkt), denn die Exponentialfunktion ist nichtnegativ, (0.5 Punkte)
- nichtlinear (weder linear noch quadratisch), denn die Nebenbedingungen enthalten quadratische Terme.

Hausaufgabe 1.2 (Stabilität der Minimierereigenschaft bei Konkatenation) $3 + 2 + 6 = 11$ Punkte

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $F \subseteq \mathbb{R}$ und $f(F) = \{f(x) \mid x \in F\}$ die Wertemenge von f über F. Es sei $g : W \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Wir betrachten die beiden Aufgaben

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über } x \in F \tag{A1}$$

und

$$\text{Minimiere} \quad g(f(x)) \quad \text{über } x \in F. \tag{A2}$$

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist g auf der Menge $f(F)$ monoton wachsend, dann ist jeder lokale Minimierer von (A1) auch ein lokaler Minimierer von (A2).

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass auf die Monotonie von g in Punkt (a) nicht verzichtet werden kann.

(c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass unter den Voraussetzungen in Punkt (a) die Aufgabe (A2) lokale Minimierer besitzen kann, die keine lokalen Minimierer von (A1) sind. Geben Sie an, wie Sie die Voraussetzung aus Punkt (a) an g verschärfen können, so dass beide Aufgaben genau dieselben lokalen Minimierer besitzen, und beweisen Sie diese Aussage.

Lösung.

(a) Es sei $x^* \in F$ ein lokaler Minimierer von (A1), d. h. es gibt eine Umgebung $U(x^*)$, sodass gilt

$$f(x^*) \leqslant f(x) \quad \text{für alle } x \in F \cap U(x^*).$$

(1 Punkt)

Weil g auf W monoton wachsend ist, gilt auch

$$g(f(x^*)) \leqslant g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in F \cap U(x^*),$$

(1 Punkt)

was äquivalent ist zu

$$(g \circ f)(x^*) \leqslant (g \circ f)(x) \quad \text{für alle } x \in F \cap U(x^*).$$

Das bedeutet, dass x^* ein lokaler Minimierer von (A2) ist. (1 Punkt)

(b) Wir betrachten die Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zulässige Menge $F = [-1, 1]$ und Wertemenge $W = [-1, 1]$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad (g \circ f)(x) = x^2,$$

wobei g offensichtlich nicht monoton wachsend auf W ist. In diesem Fall ist $x^* = -1$ ein lokaler Minimierer von (A1) , welcher aber kein lokaler Minimierer von (A2) ist. (2 Punkte)

(c) Wir betrachten die Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zulässige Menge $F = [-1, 1]$ und Wertemenge $W = [-1, 1]$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x, \quad g(x) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad (g \circ f)(x) = \text{const}.$$

In diesem Fall ist jeder Punkt in $[-1, 1]$ ein globaler Minimierer von (A2), jedoch besitzt (A1) $x^* = -1$ als einzigen lokalen und globalen Minimierer. (2 Punkte)

Die zusätzliche Voraussetzung: Ist g *streng* monoton wachsend auf W, dann stimmen die lokalen Minimierer von (A1) und (A2) überein. (1 Punkt)

Beweis: Natürlich gilt weiterhin die Aussage in Punkt (a), es bleibt also nur die Rückrichtung zu zeigen. Es sei dafür x^* ein lokaler Minimierer von (A2), also existiert per Definition eine Umgebung $U(x^*)$, so dass

$$g(f(x^*)) \leqslant g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in F \cap U(x^*) \tag{***}$$

gilt. Aus der strengen Monotonie von g auf W folgt $f(x^*) \leqslant f(x)$ für alle $x \in F \cap U(x^*)$. Denn angenommen, es gäbe ein $x \in F \cap U(x^*)$ mit $f(x^*) > f(x)$, dann würde aufgrund der strengen Monotonie von g folgen, dass auch

$$g(f(x^*)) > g(f(x))$$

gilt. Das steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass x^* ein lokaler Minimierer von (A2) ist. (3 Punkte)

Alternativer Beweis: Beginne wie oben bis (***). Weil g auf W streng monoton wachsend ist, ist g dort auch injektiv, und die Einschränkung von g auf W besitzt eine streng monoton wachsende Inverse. Das heißt, dass

$$f(x^*) = g^{-1}(g(f(x^*))) \leqslant g^{-1}(g(f(x))) = f(x) \quad \text{für alle } x \in F \cap U(x^*).$$

Das ist genau die Definition dafür, dass x^* lokaler Minimierer von (A1) ist.

Beobachtung: Zu beachten ist, dass in dem Fall der strikten Monotonie von g auf W schon die strikten lokalen Minimierer von (A1) und (A2) übereinstimmen.

Hausaufgabe 1.3 (Untersuchung von Optimalstellen) 6 + 11 = 17 Punkte

Bestimmen Sie für die unten stehenden Minimierungsaufgaben sämtliche stationäre Punkte und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um Extrempunkte handelt und ob diese lokal, global und strikt bzw. nicht strikt sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Minimiere $f(x) \coloneqq 3x^3 + 26x^2 - 12x + 5$ über $x \in \mathbb{R}$

(b) Minimiere $f(x) \coloneqq x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$ über $x = (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$

Lösung.

(a) Wir bestimmen die stationären Punkte, indem wir die Lösungen der notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung berechnen, also die Lösungen der Gleichung

$$f'(x) = 9x^2 + 52x - 12 \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Lösungen, also die stationären Punkte, sind $x^{(1)} = \frac{2}{9}$ und $x^{(2)} = -6$. (2 Punkte)

Wir überprüfen, ob lokale Optimierer vorliegen, indem wir die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung an den stationären Punkten überprüfen. Die zweite Ableitung von f ist

$$f''(x) = 18x + 52,$$

also gilt $f''(x^{(1)}) > 0$ und $f''(x^{(2)}) < 0$. Damit ergibt sich, dass x_1 strikter lokaler Minimierer und x_2 als strikter lokaler Maximierer ist. (3 Punkte)

Diese Funktion hat weder einen globalen Minimierer noch einen globalen Maximierer, weil $f(x) \longrightarrow \pm\infty$, wenn $x \longrightarrow \pm\infty$. (1 Punkt)

(b) Wir bestimmen die stationären Punkte, indem wir die Lösungen der notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung berechnen, also die Lösungen der Gleichung

$$f'(x) = \left(4x_1^3 - 4x_2, \quad 4x_2^3 - 4x_1\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese ist äquivalent zu

$$x_1 = x_2^3 \quad \text{und} \quad x_2 = x_1^3,$$

also muss für stationäre Punkte auch

$$x_1 = x_1^9 \quad \text{und} \quad x_2 = x_2^9$$

gelten, und wir erhalten als Lösungen die stationären Punkte $x^{(1)} = (0, 0)^\intercal$, $x^{(2)} = (1, 1)^\intercal$ und $x^{(3)} = (-1, -1)^\intercal$. (3 Punkte)

Wir überprüfen, ob lokale Optimierer vorliegen, indem wir die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung an den stationären Punkten überprüfen. Die zweite Ableitung hat die Form

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & -4 \\ -4 & 12x_2^2 \end{pmatrix}.$$

(1 Punkt)

Die Matrix

$$f''(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -4$ und ist somit indefinit. Folglich ist $x^{(1)}$ weder lokaler Maximierer noch lokaler Minimierer von f, da die notwendigen Bedingungen zweiter Ordnung jeweils nicht erfüllt sind. (2 Punkte)

Weiter ist

$$f''(x^{(2)}) = f''(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix},$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 16$. Damit sind $f''(x^{(2)}) = f''(x^{(3)})$ positiv definitiv, und folglich sind $x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ strikte lokale Minimierer. (2 Punkte)

Diese Funktion hat keinen globalen Maximierer, weil $f(x) \to \infty$ wenn $\|x\| \to \infty$. (1 Punkt)
Diese *radiale Unbeschränktheit* impliziert außerdem, dass globale Minimierer nur innerhalb einer kompakten Kugel um den Ursprung auftreten können. Denn die Eigenschaft bedeutet, dass ein Radius $R > 0$ existiert, so dass $f(x) > f(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| > R$. Die Kugel $\overline{B_R(0)}$ ist aber beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ und damit kompakt. Da f stetig ist, gibt es nach dem Satz von Weierstraß also mindestens ein x^* in $\overline{B_R(0)}$, so dass

$$f(x^*) = \min_{x \in \overline{B_R(0)}} f(x) \le f(0) < f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)},$$

weshalb auch x^* ein globaler Minimierer von f über $\mathbb{R}^n$ ist, und alle weiteren globalen Minimierer ebenfalls in $\overline{B_R(0)}$ liegen. Da die globalen Minimierer auch lokale sind, kommen daher nur $x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ als globale Minimierer in Frage, und da $f(x^{(2)}) = f(x^{(3)}) = -4$, stellt sich raus, dass beide lokalen Minimierer auch globale sind. (2 Punkte)

Zusatzaufgabe 1.4 (Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung sind nicht hinreichend) 3 + 5 + 2 = 10 Bonuspunkte

Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\text{Minimiere} \quad f(x) = \left(x_1 - x_2^2\right)\left(2x_1 - x_2^2\right) = 2x_1^2 - 3x_1x_2^2 + x_2^4 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung im Punkt $(0,0)^\top$ erfüllt sind.

(b) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0)^\top$ ein lokaler Minimierer der Einschränkung von f auf jede beliebige gerade Linie durch den Ursprung ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0)^\top$ *kein* lokaler Minimierer von f ist.

Lösung.

(a) Es sind

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2^2, & -6x_1x_2 + 4x_2^3 \end{pmatrix}, \quad f''(x) = \begin{pmatrix} 4 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 + 12x_2^2 \end{pmatrix},$$

und damit gilt für $x^* = (0,0)^\top$ auch

$$f(x^*) = 0, \qquad f'(x^*) = (0,0), \qquad f''(x^*) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Hessematrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 0$ positiv semidefinit ist, sind die notwendige Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung erfüllt. Hinreichende Bedingungen sind jedoch nicht erfüllt. (3 Punkte)

(b) Für beliebiges $d \in \mathbb{R}^2$, $d \neq 0$ betrachten wir Linien der Form $\ell(t) = x^* + t\,d$ für $t \in \mathbb{R}$ und $x^* = (0,0)^\top$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} f(\ell(t)) &= \left(t\,d_1 - t^2\,d_2^2\right)\left(2t\,d_1 - t^2\,d_2^2\right) \\ &= \left(2t^2\,d_1^2 - 3t^3\,d_1\,d_2^2 + t^4\,d_2^4\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\ell(t)) &= 4td_1^2 - 9t^2\,d_1\,d_2^2 + 4t^3 d_2^4 \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(\ell(t)) &= 4d_1^2 - 18t\,d_1\,d_2^2 + 12t^2 d_2^4 \end{aligned}$$

(2 Punkte)

und somit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\ell(t))|_{t=0} = 0$ sowie $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(\ell(t))|_{t=0} = 4d_1^2$. Für Richtungen $d \in \mathbb{R}^2$ mit $d_1 \neq 0$ sind also die hinreichenden Optimalitätsbedingungen entlang der Geraden erfüllt, daher hat $f \circ \ell$ an der Stelle $t = 0$ einen strikten lokalen Minimierer. (2 Punkte)

Im Fall von $d_1 = 0$ hat $f \circ \ell$ die Form $f(\ell(t)) = t^4\,d_2^2 \geqslant 0 = f(\ell(0))$, und somit ist hier ebenfalls $t = 0$ ein lokaler Minimierer von $f \circ \ell$. (1 Punkt)

(c) Wir betrachten die Kurve $\gamma(t) = (3/4t^2, t)$. Offensichtlich ist diese Kurve stetig und $\gamma(0) = x^*$ Außerdem gilt

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= \left(\frac{3}{4}t^2 - t^2\right)\left(\frac{3}{2}t^2 - t^2\right) \\ &= -\frac{1}{8}t^4 < 0 = f(x^*) \quad \text{für } t \neq 0, \end{aligned}$$

womit offensichtlich x^* kein lokaler Minimierer ist. (2 Punkte)

Fazit: Notwendige Optimalitätsbedingungen sind nicht hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Minimierers. Es ist nicht einmal hinreichend, dass die Zielfunktion entlang aller Geraden an der fraglichen Stelle einen lokalen Minimierer hat.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.